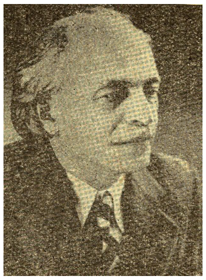


# XIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
**Zenta, 2015. december 5.**

## 12. évfolyam

**1. Egy természetes számot sikeresnek nevezünk akkor, ha tízes számrendszerbeli alakjában szereplő számjegyeit két csoportra lehet osztani úgy, hogy a csoportokban lévő számjegyek összege megegyezzen. Keresd meg azt a legkisebb $N$ természetes számot, amelyre $N$ is és $(N+1)$ is sikeres!**

**2. Az $ABC$ hegyesszögű háromszögben legyen $D$ pont a $C$ csúcsból húzott magasság talppontja úgy, hogy $AD=BC$ érvényes. Ha $L$ pont a $D$ pontból húzott merőleges talppontja az $A$ csúcsból szerkesztett magasságra, akkor igazold, hogy a $BL$ az $ABC\angle$ szögfelezője!**

**3. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:**

$$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=\log_{0,5}(x-1).$$

**4. Határozd meg, hogy mely $n$ természetes számok esetén lesz az**

$$S=2015^n+2015^{n-1}+\ldots+2015+1$$

**kifejezés osztható** 2014**-gyel! Határozd meg a két legkisebb ilyen számot!**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

***Jó munkát!***

# MEGOLDÁSOK – 12. évfolyam

**1. Egy természetes számot sikeresnek nevezünk akkor, ha tízes számrendszerbeli alakjában szereplő számjegyeit két csoportra lehet osztani úgy, hogy a csoportokban lévő számjegyek összege megegyezzen. Keresd meg azt a legkisebb $N$ természetes számot, amelyre $N$ is és $(N+1)$ is sikeres!**

**Megoldás:** Nyilvánvaló, hogy egy tetszőleges sikeres szám számjegyeinek összege páros. $N$ és $(N+1)$ egyszerre csak akkor lehet sikeres, ha $N$ kilencesre végződik. Ellenkező esetben ugyanis $N$ és $(N+1)$ számjegyei összegének paritása eltérő lenne. $N$ nem lehet kétjegyű szám, mert az egyetlen lehetséges kétjegyű szám ekkor az $N=99$ lenne, de ekkor $N+1=100$ nem sikeres szám. Tehát a háromjegyű $N$ számokat kell vizsgálni, vagyis:

$$N=\overline{xy9}$$

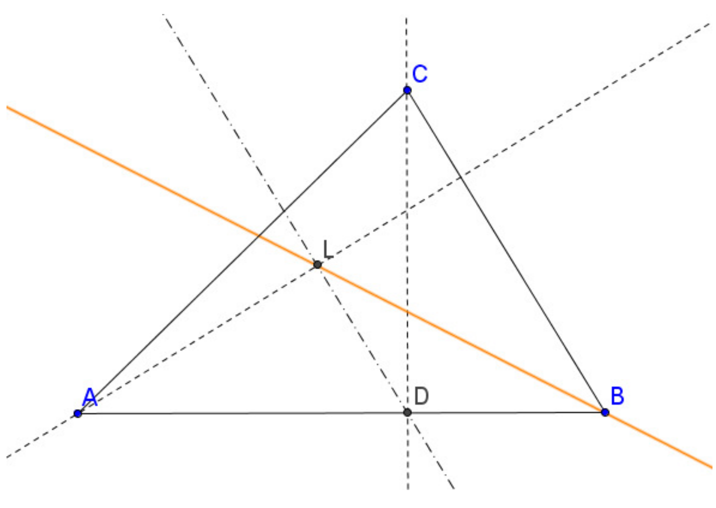
ahol $y<9$, így

$$N+1=\overline{x(y+1)0}\,.$$

Ekkor $x+y=9$ és $x=y+1$, amiből $x=5,\ y=4$. A keresett sikeres számok tehát az $549$ és $550$.

**2. Az $ABC$ hegyesszögű háromszögben legyen $D$ pont a $C$ csúcsból húzott magasság talppontja úgy, hogy $AD=BC$ érvényes. Ha $L$ pont a $D$ pontból húzott merőleges talppontja az $A$ csúcsból szerkesztett magasságra, akkor igazold, hogy a $BL$ az $ABC\angle$ szögfelezője!**

**Megoldás:** Mivel $DAL\angle=90°-ABC\angle=BCD\angle$ és $AD=CB$, a két derékszögű háromszög, $ALD$ és $BCD$ a SZÖG-OLDAL-SZÖG egybevágósági tétel alapján egybevágó, és ezért befogóik is egybevágóak, azaz $LD=BD$. Tehát $LDB$ háromszög egyenlő szárú, s így $DLB\angle=DBL\angle$.




Ezek alapján $180°=LAB\angle+ABL\angle+BLA\angle=90°-ABC\angle+ABL\angle+90°+ABL\angle$, amiből következik, hogy $2\cdot ABL\angle=ABC\angle$, amit bizonyítani kellett.

**3. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:**

$$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=\log_{0,5}(x-1).$$

**Megoldás:** Mivel az egyenlet bal oldala nemnegatív, így $\log_{0,5}(x-1)\geq 0$ kell legyen, ahonnan $0<x-1\leq 1 \Rightarrow 1<x\leq 2$. Így az egyenlet értelmezési tartománya $D=(1,2]$. Vegyük észre továbbá, hogy

$$x-2\sqrt{x-1}=\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2$$

és

$$x+2\sqrt{x-1}=\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2,$$

ezért az egyenlet felírható a következő alakban:

$$\left|x-\sqrt{x-1}\right|+\left|x+\sqrt{x-1}\right|=\log_{0,5}(x-1).$$

Ha figyelembe vesszük az értelmezési tartományt, akkor az egyenlet felírható abszolút értékek nélkül a

$$\sqrt{x-1}+1-\sqrt{x-1}+1=\log_{0,5}(x-1)$$

alakban, ahonnan

$$\log_{0,5}(x-1)=2.$$

Innen

$$x-1=0,5^2 \Leftrightarrow x=1+\frac{1}{4}\Leftrightarrow x=\frac{5}{4}.$$

Könnyen leellenőrizhető, hogy ez a szám valóban megoldása az egyenletnek.

**4. Határozd meg, hogy mely $n$ természetes számok esetén lesz az**

$$S=2015^n+2015^{n-1}+...+2015+1$$

**kifejezés osztható** 2014**-gyel! Határozd meg a két legkisebb ilyen számot!**

**Megoldás:** Először belátjuk, hogy $S-(n+1)$ osztható 2014-gyel. Mivel

$$\begin{aligned}&S-(n+1)=\\&=S-(1+1+...+1)=\\&=\left(2015^n-1\right)+\left(2015^{n-1}-1\right)+...+(2015-1)+(1-1),\end{aligned}$$

Ezért bármely $k>0$ természetes szám esetén

$$2015^k-1=(2015-1)\left(2015^{k-1}+2015^{k-2}+...+1\right),$$

így a $\left(2015^k-1\right)$ tagok mindegyike, illetve $S-(n+1)$ is osztható 2014-gyel.

Ebből következik, hogy $S$ akkor és csakis akkor osztható $2014$-gyel, ha $(n+1)$ is osztható $2014$-gyel.

A két legkisebb természetes szám, amelyekre $S$ osztható $2014$-gyel, a 2013 és a 4027.