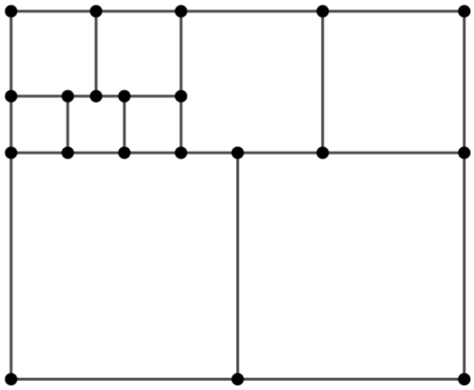
XXI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2023. december 2.

<u>7. évfolyam</u>

1. Igazold, hogy $10^{2023}+8$ osztható 9-cel!

2. Misi egy hosszú téli estén talált két különböző méretű téglalap alakú kartont. Mindkettőt feldarabolta négyzetekre. Az első kartont az ábrán látható módon vágta szét, majd a másodikat szintén ennek a mintájára bontotta fel.



a) Mekkora volt az első téglalap területe, ha a belőle kapott legkisebb négyzet kerülete $8\ cm$?
b) A másik téglalapból kapott legnagyobb négyzet területe $100\ cm^2$. Mekkora volt a téglalap kerülete a darabolás előtt?
(Megjegyzés: a kapott négyzetek oldalhossza nem feltétlenül természetes szám.)

3. Egy zacskóban 9 darab egyforma színű papírba csomagolt, azonos átmérőjű csokigolyó van. Tudjuk, hogy van közöttük egy, ami a töltetéke miatt nehezebb többinél. Csak egy kétkarú mérleg áll rendelkezésre, hogy megtaláljuk ezt a különleges édességet. Hogyan lehet a lehető legkevesebb méréssel BIZTOSAN megtalálni a nehezebb golyót?

4. Egy $ABCD$ rombusz AB oldalán felveszünk egy tetszőleges X pontot. A BC oldalon egy Y pontot veszünk fel úgy, hogy teljesüljön $AX=BY$. A rombusz A csúcsnál lévő belső szöge 60°. Bizonyítsd be, hogy a DXY háromszög egyenlő oldalú!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

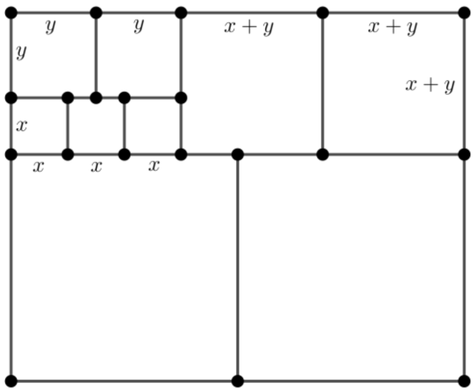
Jó munkát!

XXI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI – 7. évfolyam

1. Igazold, hogy $10^{2023}+8$ osztható 9-cel!

Megoldás. Ez a szám egy 2024-jegyű természetes szám, aminek az első számjegye 1, az utolsó 8, közöttük pedig 2022 darab 0 helyezkedik el. A számjegyek összege ezért pontosan 9. Ezzel az állítást igazoltuk.

2. Misi egy hosszú téli estén talált két különböző méretű téglalap alakú kartont. Mindkettőt feldarabolta négyzetekre. Az első kartont az ábrán látható módon vágta szét, majd a másodikat szintén ennek a mintájára bontotta fel.



a) Mekkora volt az első téglalap területe, ha a belőle kapott legkisebb négyzet kerülete $8\ cm$?
b) A másik téglalapból kapott legnagyobb négyzet területe $100\ cm^2$. Mekkora volt a téglalap kerülete a darabolás előtt?
(Megjegyzés: a kapott négyzetek oldalhossza nem feltétlenül természetes szám.)

Megoldás. Vezessük be az ábrán látható jelöléseket! Legyen a legkisebb négyzet oldalhossza x, a nála kicsivel nagyobb négyzet oldalhossza y.

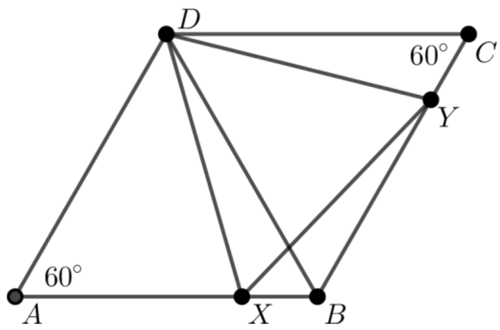
a) Ha a legkisebb négyzet kerülete $8\ cm$, akkor $x=2\ cm$. Az ábráról szépen leolvasható, hogy $3x=2y$, ahonnan kiderül, hogy $y=3\ cm$. Az $x+y$ oldalú négyzetek oldalhossza $5\ cm$. Az eredeti téglalap vízszintes oldalainak hosszúsága $2x+4y=16\ cm$. Mivel az alsó sorban két négyzet van, ezek oldala $8\ cm$ hosszú. Tehát az eredeti téglalap magassága $13\ cm$, azaz a területe $13\cdot 16=208\ cm^2$.

b) A legnagyobb négyzet területe $100\ cm^2$. Ebből következik, hogy az oldalhossza $10\ cm$, azaz a téglalap vízszintes oldalának a hossza $20\ cm$. Az ábra jelöléseit felhasználva tehát $y+y+(x+y)+(x+y)=2x+4y=20$, azaz $x+2y=10$. De az is igaz, hogy $x+x+x+(x+y)+(x+y)=5x+2y=20$. Innen $4x+(x+2y)=20$, ami azt jelenti, hogy $4x+10=20$, ahonnan $x=2,5\ cm$-t kapunk. Tehát $2,5+2y=10$, azaz $y=3,75\ cm$. Könnyen kiszámítható, hogy a téglalap függőleges oldala $16,25\ cm$, tehát a kerülete $2\cdot(20+16,25)=72,5\ cm$.

3. Egy zacskóban 9 darab egyforma színű papírba csomagolt, azonos átmérőjű csokigolyó van. Tudjuk, hogy van közöttük egy, ami a töltelékében miatt nehezebb többinél. Csak egy kétkarú mérleg áll rendelkezésre, hogy megtaláljuk ezt a különleges édességet. Hogyan lehet a lehető legkevesebb méréssel BIZTOSAN megtalálni a nehezebb golyót?

Megoldás. Az első mérésnél tegyünk a mérleg serpenyőibe $3-3$ golyót a maradék három golyót pedig tegyük félre. Két eset lehetséges:
I. Ha a mérleg kibillen, megtudjuk hogy melyik serpenyőben van a nehezebb golyó. Innen kezdve csak ezzel a 3 golyóval foglalkozunk. Megint félreteszünk egyet, a másik kettőt pedig a mérleg külöböző serpenyőibe tesszük. Ha a mérleg kibillen, akkor tudjuk, hogy melyik a nehezebb golyó. Ha viszont egyenlőnek mutatja a két golyót, akkor a félretett golyó az, ami nehezebb a többinél. Tehát a második mérés után eredményre jutottunk.
II. Ha a mérleg azonosnak mutatja a két csoport tömegét, akkor a nehezebb golyó a félretett 3 golyó között van. Tegyünk fel közülük egyet-egyet a mérleg serpenyőibe, egyet pedig tegyünk félre. Ha a mérleg kibillen akkor tudjuk, hogy melyik a nehezebb golyó. Ha viszont egyenlőséget mutat, akkor a félretett golyó a keresett csoki. Ebben az esetben is elég volt két mérést alkalmazni.

4. Egy $ABCD$ rombusz AB oldalán felveszünk egy tetszőleges X pontot. A BC oldalon egy Y pontot veszünk fel úgy, hogy teljesüljön $AX = BY$. A rombusz A csúcsnál lévő belső szöge 60°. Bizonyítsd be, hogy a DXY háromszög egyenlő oldalú!



Megoldás. Készítsük el a mellékelt ábrát! A rombusz oldalai egyenlőek, a feladat feltételei szerint pedig $AX = BY$. Ebből következik, hogy $XB = YC$. Egyszerűen belátható, hogy a BD átló a rombuszt két egyenlő oldalú háromszögre bontja: az ABD háromszög egyenlőszárú, mivel $AB = AD$, ezek a rombusz oldalai. Ezért az alapon fekvő (B és D csúcsnál lévő) belső szögei egyenlőek. Mivel az A csúcsnál lévő belső szög 60°, így a másik két szög is 60°-os lesz. Hasonlóan igazolható, hogy a BDC háromszög is egyenlő oldalú.
Figyeljük meg az XBD és YDC háromszögeket: $XB = CY$ (a feladat feltételei szerint), $XBD\angle = YCD\angle = 60^\circ$, $DC = BD$ (mivel a BD átló hossza megegyezik a rombusz oldalával). Tehát a két háromszög egybevágó. Ennek következménye, hogy $DX = DY$, ami azt jelenti, hogy a DXY háromszög egyenlő szárú. Az XBD és YDC háromszögek egybevágóságából következik az is, hogy $BDX\angle = CDY\angle$. Az $XDY\angle = 60^\circ$, mivel a $BDC\angle = 60^\circ$, és

$$XDY\angle = BDC\angle - CDY\angle + BDX\angle.$$

Az az egyenlőszárú háromszög, aminek a szárai 60°-os szöget zárnak be egymással, egyenlő oldalú. Tehát sikerült bebizonyítani, hogy a DXY háromszög egyenlő oldalú.