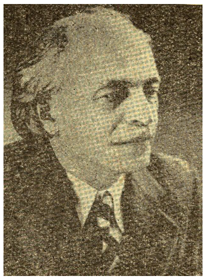


XIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2015. december 5.

<u>9. évfolyam</u>

1. Határozd meg mindazokat az x és y természetes számokat, amelyekre

$$x^2 - 1 = y^2 + 2014.$$

2. Inci és Anci filmnézés közben limonádét iszogattak a moziban. Inci közepes limonádét vásárolt, Anci pedig nagy limonádét, amely 50%-kal nagyobb, mint a közepes limonádé. Miután mindketten megitták limonádéjuk $\frac{3}{4}$ részét, Anci Incinek adta megmaradt limonádéja egyharmadát és még $0.5\ \mathrm{dl}$-t. Miután a film befejeződött és megitták az összes limonádét, megállapították, hogy mindketten ugyanannyi mennyiségű limonádét fogyasztottak el. Hány deciliter limonádét ivott meg összesen Inci és Anci?

3. Hány olyan konvex (domború) sokszög van amelynek három egymást követő csúcsa $A(5;0)$, $B(5;5)$ és $C(0;5)$ koordinátájú pont, a többi csúcsának koordinátái pedig szintén nem negatív egész számok?

4. Legyen ABC tetszőleges háromszög. Az adott háromszög $\overline{AD}$ magasságvonalán kijelölünk egy E pontot. Bizonyítsd be, hogy igaz az $|AC|^2 - |CE|^2 = |AB|^2 - |EB|^2$ egyenlőség!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

MEGOLDÁSOK – 9. évfolyam

1. Határozd meg mindazokat az x és y természetes számokat, amelyekre

$$x^2 - 1 = y^2 + 2014.$$

Megoldás: Az $x^2 - 1 = y^2 + 2014$ kifejezést átírhatjuk $x^2 - y^2 = 2015$, illetve $(x-y)(x+y) = 2015$ formába. Mivel $x, y \in N$, ezért $x - y < x + y$. **(4 pont)**

Mivel $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$, ezért a következő lehetőségek állnak fenn: **(5 pont)**

$2015 = 1 \cdot 2015$ **(2 pont)**

$2015 = 5 \cdot 403$ **(2 pont)**

$2015 = 13 \cdot 155$ **(2 pont)**

$2015 = 31 \cdot 65$. **(2 pont)**

$x - y = 1$ és $x + y = 2015$ esetén $x = 1008$ és $y = 1007$. **(2 pont)**

$x - y = 5$ és $x + y = 403$ esetén $x = 204$ és $y = 199$. **(2 pont)**

$x - y = 13$ és $x + y = 155$ esetén $x = 84$ és $y = 71$. **(2 pont)**

$x - y = 31$ és $x + y = 65$ esetén $x = 48$ és $y = 17$. **(2 pont)**

2. Inci és Anci filmnézés közben limonádét iszogattak a moziban. Inci közepes limonádét vásárolt, Anci pedig nagy limonádét, amely 50%-kal nagyobb, mint a közepes limonádé. Miután mindketten megitták limonádéjuk $\frac{3}{4}$ részét, Anci Incinek adta megmaradt limonádéja egyharmadát és még 0.5 dl-t. Miután a film befejeződött és megitták az összes limonádét, megállapították, hogy mindketten ugyanannyi mennyiségű limonádét fogyasztottak el. Hány deciliter limonádét ivott meg összesen Inci és Anci?

Megoldás: Ha x jelöli a közepes limonádé mennyiségét deciliterben, amit Inci vásárolt, akkor Anci $1.5x$ deciliter limonádét vett. Inci Ancitól

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1.5x + 0.5 = \frac{1}{8}x + 0.5$$ **(5 pont)**

deciliter limonádét kapott. Ez azt jelenti, hogy Inci összesen $x + \frac{1}{8}x + 0.5 = \frac{9}{8}x + 0.5$ deciliter limonádét ivott meg. **(5 pont)**

Anci viszont összesen $1.5x - \left(\frac{1}{8}x + 0.5\right) = \frac{11}{8}x - 0.5$ deciliter limonádét fogyasztott el.

(5 pont)

Ekkor $\frac{11}{8}x - 0.5 = \frac{9}{8}x + 0.5$, azaz $\frac{2}{8}x = 1$, ahonnan következik, hogy $x = 4$. **(5 pont)**

Ez azt jelenti, hogy a közepes limonádé mennyisége 4 dl, a nagy limonádé mennyisége 6 dl, és összesen 10 dl limonádét ittak meg a filmvetítés ideje alatt.

(5 pont)

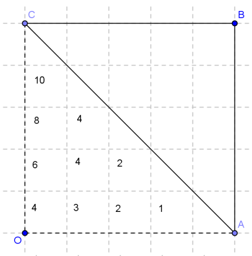
3. Hány olyan konvex (domború) sokszög van amelynek három egymást követő csúcsa $A(5;0)$, $B(5;5)$ és $C(0;5)$ koordinátájú pont, a többi csúcsának koordinátái pedig szintén nem negatív egész számok?

Megoldás: Háromszög 1 van. **(5 pont)**

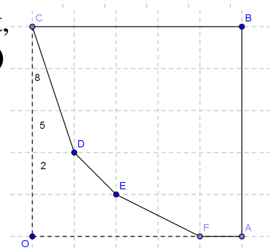
Négyszög negyedik csúcsa olyan rácspont lehet, amely az ACO háromszög belsejében vagy az AO illetve CO oldalon van. Az ilyen pontok száma 15, így ennyi négyszög van. **(5 pont)**

Ötszögnél a negyedik D csúcs helyét rögzítsük először, az ötödik csúcs lehetséges helyzeteinek számát D helyének megfelelően rácspontra írjuk. Például, $D(3,1)$ pont után csak a $E(4,0)$ ponttal kapunk konvex ötszöget, ezért E-hez 1-et írunk.

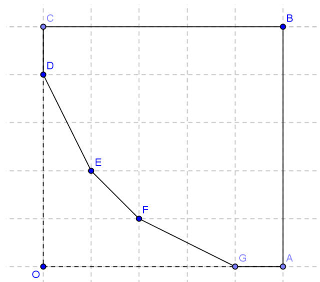
Összesen $10+8+4+6+4+2+4+3+2+1=44$ ötszög lehetséges. **(5 pont)**



Hasonló módon számolhatjuk össze a hatszögeket, amelyekből $8+5+2+1=16$ van. **(5 pont)**



Hétszög pedig csak 1 van.



Több csúcsú sokszög nem lehetséges, mert akkor az A, B és C csúcsokon kívül legalább 5 csúcsból vagy legalább 2-nek megegyezik az első vagy második koordinátája és így a sokszög konkáv vagy három csúcs egy egyenesre esik.

Így az összes lehetséges sokszög száma: $1+15+44+16+1=77$. **(5 pont)**

4. Legyen ABC tetszőleges háromszög. Az adott háromszög $\overline{AD}$ magasságvonalán kijelölünk egy E pontot. Bizonyítsd be, hogy igaz az $|AC|^2-|CE|^2=|AB|^2-|EB|^2$ egyenlőség!

Megoldás: A BDA és BDE háromszögekre alkalmazva a Pitagorasz tételt adódik:

$|AB|^2=|AD|^2+|BD|^2$, $|EB|^2=|ED|^2+|BD|^2$ és $|AB|^2-|EB|^2=|AD|^2-|ED|^2$.

Az ADC és EDC háromszögekre alkalmazva a Pitagorasz tételt adódik:

$|AC|^2=|AD|^2+|DC|^2$, $|EC|^2=|ED|^2+|DC|^2$ és $|AC|^2-|EC|^2=|AD|^2-|ED|^2$.

Ebből következik, hogy $|AC|^2-|CE|^2=|AB|^2-|EB|^2$. **(25 pont)**