XIII. Fekete Mihály matematikaverseny

Második levelező forduló

9. évfolyam

1. A kétjegyű, tízes számrendszerbeli pozitív egész számok hányad részét alkotják azok, amelyekre igaz, hogy a szám egyenlő a számjegyei szorzatának és a számjegyei összegének az összegével?

2. Nagymamának az idén kevés szilva termett a kertben, a nagy szemű szilvából mindössze 10 kg, az apró szemű szilvából pedig 8 kg. Nagymama ezért elhatározta, hogy ahelyett, hogy a piacon a nagy szemű szilvát kilogrammonként 260 dinárért, az apró szemű szilvát kilogrammonként 210 dinárért eladná, lekvárt főz az összes szilvából és azt fogja eladni. A nagy szemű szilva tömegének $\frac{1}{4}$ része, az apró szemű szilvának $\frac{1}{3}$ része a szilva magja, amely főzéskor nyilván nem hasznosítható. A szilva főzéséhez nagymama semmilyen adalékanyagot nem használ, de a szilva tömegének $\frac{4}{7}$ -része a párolgás miatt kárba vész. Mennyiért adja nagymama az így elkészült kiváló minőségű szilvalekvár kilogrammját, hogy a szilva piaci eladásához képest éppen 1000 dinár többletbevétele legyen?

3. Határozd meg a p valós szám értékét úgy, hogy az $x^2 + 4x - 6px + 9p^2 - 7p + 11$ kifejezés teljes négyzet legyen!

4. Az ABC háromszögben $BAC\angle = 120°$. A D pont az adott háromszög belsejében levő olyan pont, amelyre teljesül, hogy $DBC\angle = 2ABD\angle$ és $DCB\angle = 2ACD\angle$. Számold ki a $BDC\angle$ nagyságát!

Sikeres munkát kívánunk!

A Második levelező fordulóban a megoldások beküldésének határideje: **2015. november 7.**
Minden feladatot maximum 25 ponttal értékelünk. A megoldásokat részletesen kell indokolni!
Minden feladat megoldását külön A4-es formátumú lapon kérjük beadni a név és évfolyam feltüntetésével. A feladatmegoldásokat tartalmazó lapokat egy dupla A4-es formátumú borítólapba kell beletenni. A borítólapra kérjük ráírni a következő adatokat:

Versenyző neve: ____________________
Versenyző e-mail címe: ____________________
Versenyző évfolyama: ____________________
Versenyző telefonszáma: ____________________
Versenyző iskolájának neve: ____________________
Versenyző iskolájának székhelye: ____________________
Felkészítő tanár neve: ____________________
Felkészítő tanár telefonszáma: ____________________
Felkészítő tanár e-mail címe: ____________________

A megadott versenyzői és tanári e-mail címre minden forduló után el fogjuk küldeni a versenyző adott fordulóban elért pontszámát.
Minden további értesítés megtalálható lesz az **Ingenium Alapítvány** honlapján: http://ingenium.rs/

Postacím: Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium
L e v e l e z ő v e r s e n y
24400 Zenta
Posta utca 18.

XIII. Fekete Mihály matematikaverseny

Második levelező forduló

10. évfolyam

1. Mely x és y valós számokra teljesül a következő egyenlőtlenség?

$$x+y+xy \geq x^2+y^2+1.$$

2. Az $ABCD$ szimmetrikus (egyenlőszárú) trapéz hosszabb alapja $AB=3$ cm. A BC átmérőjű kör átmegy az átlók metszéspontján és az AB alap B-hez legközelebbi negyedelőpontján. Mekkora a trapéz területe?

3. Jelölje $(a;b)$ az a és b pozitív egész számok legnagyobb közös osztóját. Mennyi az alábbi 2015 tagú összeg?

$$(1;2015)+(2;2015)+(3;2015)+\cdots+(2015;2015)$$

4. Hány olyan szám van 0 és 9999 között, amelyikben több 2-es van a jegyek között, mint 1-es?

Sikeres munkát kívánunk!

A Második levelező fordulóban a megoldások beküldésének határideje: **2015. november 7.**
Minden feladatot maximum 25 ponttal értékelünk. A megoldásokat <u>részletesen</u> kell indokolni!
Minden feladat megoldását külön A4-es formátumú lapon kérjük beadni a név és évfolyam feltüntetésével. A feladatmegoldásokat tartalmazó lapokat egy dupla A4-es formátumú borítólapba kell beletenni. A borítólapra kérjük ráírni a következő adatokat:

Versenyző neve: ______________________________
Versenyző e-mail címe: ______________________________
Versenyző évfolyama: ______________________________
Versenyző telefonszáma: ______________________________
Versenyző iskolájának neve: ______________________________
Versenyző iskolájának székhelye: ______________________________
Felkészítő tanár neve: ______________________________
Felkészítő tanár telefonszáma: ______________________________
Felkészítő tanár e-mail címe: ______________________________

A megadott versenyzői és tanári e-mail címre minden forduló után el fogjuk küldeni a versenyző adott fordulóban elért pontszámát.

Minden további értesítés megtalálható lesz az **Ingenium Alapítvány** honlapján: http://ingenium.rs/

Postacím: Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium
L e v e l e z ő v e r s e n y
24400 Zenta
Posta utca 18.

XIII. Fekete Mihály matematikaverseny

Második levelező forduló

11. évfolyam

1. Oldd meg az $x^{5-x} = (6-x)^{1-x}$ egyenletet a természetes számok halmazán!

2. Igazold, hogy $\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$.

3. Az $ABCD$ húrnégyszög (AB nem párhuzamos CD) átlóinak metszéspontja M . Az M ponton át a DC oldallal párhuzamosan húzott egyenes az AB oldal egyenesét P -ben metszi. Igazold, hogy $PM^2 = PA \cdot PB$.

4. Igazold, hogy $2^{2^n} - 4$ osztható 12 -vel minden $n \in \mathbb{N}$ számra!

Sikeres munkát kívánunk!

A Második levelező fordulóban a megoldások beküldésének határideje: **2015. november 7.**
Minden feladatot maximum 25 ponttal értékelünk. A megoldásokat <u>részletesen</u> kell indokolni!
Minden feladat megoldását külön A4-es formátumú lapon kérjük beadni a név és évfolyam feltüntetésével. A feladatmegoldásokat tartalmazó lapokat egy dupla A4-es formátumú borítólapba kell beletenni. A borítólapra kérjük ráírni a következő adatokat:

Versenyző neve: ______________________________
Versenyző e-mail címe: ______________________________
Versenyző évfolyama: ______________________________
Versenyző telefonszáma: ______________________________
Versenyző iskolájának neve: ______________________________
Versenyző iskolájának székhelye: ______________________________
Felkészítő tanár neve: ______________________________
Felkészítő tanár telefonszáma: ______________________________
Felkészítő tanár e-mail címe: ______________________________

A megadott versenyzői és tanári e-mail címre minden forduló után el fogjuk küldeni a versenyző adott fordulóban elért pontszámát.

Minden további értesítés megtalálható lesz az **Ingenium Alapítvány** honlapján: http://ingenium.rs/

Postacím: Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium
L e v e l e z ő v e r s e n y
24400 Zenta
Posta utca 18.

XIII. Fekete Mihály matematikaverseny

Második levelező forduló

12. évfolyam

1. Add meg és ábrázold a derékszögű koordinátarendszerben azoknak a $P(x, y)$ pontoknak a halmazát, amelyek koordinátáira igaz az alábbi egyenlőtlenség:

$$x^{x^2+y^2} < x^9 \quad (x > 0).$$

2. Adott az $\{a_n\}$ sorozat úgy, hogy $a_1 = 3,\ a_{n+1} = a_n + \frac{n}{2}\ (n \in \mathbf{N})$. Határozd meg a_{2004} értékét.

3. Oldd meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$3^{\frac{1}{2}+\log_3 \cos x} + 6^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}+\log_9 \sin x}.$$

4. Legyenek az ABC háromszög szögei α, β, γ és a velük szemközti oldalak hossza rendre a, b, c. Bizonyítsd be, hogy a háromszög akkor és csakis akkor szabályos, ha

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{c^2}{ab} \quad \textbf{és} \quad \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = \frac{a^2}{bc}.$$

Sikeres munkát kívánunk!
A Második levelező fordulóban a megoldások beküldésének határideje: **2015. november 7.**
Minden feladatot maximum 25 ponttal értékelünk. A megoldásokat részletesen kell indokolni!
Minden feladat megoldását külön A4-es formátumú lapon kérjük beadni a név és évfolyam feltüntetésével. A feladatmegoldásokat tartalmazó lapokat egy dupla A4-es formátumú borítólapba kell beletenni. A borítólapra kérjük ráírni a következő adatokat:
Versenyző neve: ______________________
Versenyző e-mail címe: ______________________
Versenyző évfolyama: ______________________
Versenyző telefonszáma: ______________________
Versenyző iskolájának neve: ______________________
Versenyző iskolájának székhelye: ______________________
Felkészítő tanár neve: ______________________
Felkészítő tanár telefonszáma: ______________________
Felkészítő tanár e-mail címe: ______________________
A megadott versenyzői és tanári e-mail címre minden forduló után el fogjuk küldeni a versenyző adott fordulóban elért pontszámát.

Minden további értesítés megtalálható lesz az **Ingenium Alapítvány** honlapján: http://ingenium.rs/
Postacím: Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium
L e v e l e z ő v e r s e n y
24400 Zenta
Posta utca 18.