



XXI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2023. december 2.

5. évfolyam

- 1. Pisti és Peti, a két jóbarát diót és mogyorót gyűjt. Pisti eddig 150 szem mogyorót, Peti pedig 100 szem diót talált. Megegyeznek abban, hogy addig csereberélnek, amíg mindkettőjüknek ugyanannyi darab termésük nem lesz. Hányadik csere után lesz egyenlő számú termésük, ha minden csere alkalmával Peti két dióért három mogyorót kap Pistitől?**
- 2. Pisti először összeadta azokat a 100-nál kisebb természetes számokat, amelyekben nem szerepel az 1-es számjegy. Azután azokat a 100-nál kisebb természetes számokat adta össze, amelyekben nem szerepel a 2-es számjegy. Mennyi az így kapott két összeg különbsége?**
- 3. Pisti matematika tanára egy csapatversenyre 6 tanulót (András, Balázs, Pisti, Emese, Flóra és Hajni) nevezett be. Egy csapatnak két vagy három tanulóból kell állnia. A tanár úgy döntött, hogy minden csapatban legyen legalább egy lány. Hányféleképpen állíthatja össze a csapatokat?**
- 4. Egy dobozban háromféle színű: piros, sárga és fehér kockák vannak. Közülük 27 nem fehér, 39 pedig nem piros. A piros kockák száma fele a fehér kockák számának. Hány piros, sárga és fehér kocka van a dobozban?**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XXI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI – 5. évfolyam

1. Pisti és Peti, a két jóbarát diót ésogyorót gyűjt. Pisti eddig 150 szemogyorót, Peti pedig 100 szem diót talált. Megegyeznek abban, hogy addig csereberélnek, amíg mindkettőjüknek ugyanannyi darab termésük nem lesz. Hányadik csere után lesz egyenlő számú termésük, ha minden csere alkalmával Peti két dióért háromogyorót kap Pistitől?

Megoldás. A termékek száma közötti különbség 50. Minden cserével 2-vel csökken a különbség. Pisti termésének száma eggyel csökken, mert hármat ad és kettőt kap, Petié pedig eggyel nő, mert kettőt kap és hármat ad. A különbség ezért 25 csere után lesz 0.

2. Pisti először összeadta azokat a 100-nál kisebb természetes számokat, amelyekben nem szerepel az 1-es számjegy. Azután azokat a 100-nál kisebb természetes számokat adta össze, amelyekben nem szerepel a 2-es számjegy. Mennyi az így kapott két összeg különbsége?

Megoldás. Az első összeg meghatározásához először kiszámítjuk a 100-nál kisebb természetes számok összegét, majd ebből kivonjuk azoknak a számoknak az összegét, amelyekben szerepel az 1-es számjegy. A száznál kisebb pozitív egész számok összegének kiszámításához ezeket párokba rendezzük a következőképpen $1+99$, $2+98$, $3+97$, és így tovább. Belátható, hogy 49 ilyen számpár van, amelyekben minden számpár esetében az összeg 100-zal egyenlő és még marad egy szám az 50. Tehát a 100-nál kisebb pozitív egész számok összege $49 \cdot 100 + 50 = 4950$.

A 100-nál kisebb pozitív egész számok felírásakor az 1-es számjegy az 1, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81 és 91 számokban szerepel, ezek összege 594.

Tehát a Pisti által leírt első összeg $4950 - 594 = 4356$.

A 2-es számjegy a következő számokban szerepel: 2, 12, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 32, 42, 52, 62, 72, 82 és 92, ezek összege 693.

Tehát a Pisti által kiszámolt második összeg $4950 - 693 = 4257$.

Ebből következik, hogy a két összeg különbsége: $4356 - 4257 = 99$.

3. Pisti matematika tanára egy csapatversenyre 6 tanulót (András, Balázs, Pisti, Emese, Flóra és Hajni) nevezett be. Egy csapatnak két vagy három tanulóból kell állnia. A tanár úgy döntött, hogy minden csapatban legyen legalább egy lány. Hányféleképpen állíthatja össze a csapatokat?

Megoldás. Jelöljük a gyerekeket a neveik kezdőbetűivel, vagyis A, B, P, E, F, H . Amennyiben a tanár három kétfős csapat összeállításában gondolkodik, akkor a következő csapat összeállítások lehetségesek:

$A-E, B-F, P-H$;

$A-E, B-H, P-F$;

$A-F, B-E, P-H$;

$A-F, B-H, P-E$;

$A-H, B-E, P-F$;

$A-H, B-F, P-E$.

A fentieket figyelembe véve a három darab két főből álló csapat összesen hatféleképpen állítható össze. A tanár viszont három főből álló csapatokat is összeállíthat. Ebben az esetben elég megvizsgálni az egyik csapat összeállításának lehetséges módozatait, ugyanis a többi gyerek a másik csapatba kerül. Ezt a gondolatmenetet követve vizsgáljuk meg például azokat az eseteket, amikor az első csapatba egy lány és két fiú kerül. Így például Emese csapattársai András és Béla, András és Pisti, illetve Béla és Pisti lehetnek, ez pedig három lehetőséget jelent. Hasonlóan három-három esetben lesz Flórának, illetve Hajninak a csapattársa két fiú. Így a két darab három főből álló csapat összeállítása $3 \cdot 3 = 9$ -féleképpen lehetséges. Tehát Pisti matematikatanára összesen $6 + 9 = 15$ -féleképpen állíthatja össze a csapatokat.

4. Egy dobozban háromféle színű: piros, sárga és fehér kockák vannak. Közülük 27 nem fehér, 39 pedig nem piros. A piros kockák száma fele a fehér kockák számának. Hány piros, sárga és fehér kocka van a dobozban?

Megoldás. Amennyiben 27 kocka nem fehér, akkor az a 27 kocka sárga vagy piros lehet: $s + p = 27$. Amennyiben 39 kocka nem piros, akkor ez a 39 kocka sárga vagy fehér lehet: $s + f = 39$. A fehér kockák száma kétszer nagyobb a piros kockák számánál: $f = 2 \cdot p$.

Piros kockák száma: $39 - 27 = 12$.

Fehér kockák száma: $12 \cdot 2 = 24$.

Sárga kockák száma: $27 - 12 = 15$.

A dobozban 12 piros, 15 sárga és 24 fehér kocka van.