XXI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2023. december 2.

12. évfolyam

1. Hányféleképpen választhatunk ki egy konvex 12-szög csúcsai közül 5-öt úgy, hogy az általuk alkotott ötszög egyik oldala se legyen oldala az eredeti 12-szögnek?

2. Fel lehet-e bontani egy négyzetet konvex ötszögekre?

3. Adott néhány (három vagy annál több) egymást követő háromjegyű páratlan természetes szám. Bizonyítsd be, hogy mindig sorbarakhatjuk ezeket a számokat úgy, hogy a számok egymás mellé írásával keletkező új szám összetett szám legyen!

4. Bizonyítsd be, hogy csak véges sok olyan $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ polinom létezik, amelynek minden együtthatója 1 vagy -1, valamint minden gyöke valós!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

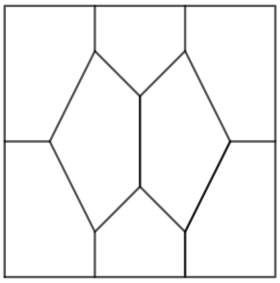
XXI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI – 12. évfolyam

1. Hányféleképpen választhatunk ki egy konvex 12-szög csúcsai közül 5-öt úgy, hogy az általuk alkotott ötszög egyik oldala se legyen oldala az eredeti 12-szögnek?

Megoldás. Jelöljük a 12-szög csúcsait az 1-től 12-ig terjedő számokkal. Két esetet különböztetünk meg.
I. eset. Ha kiválasztottuk a 12-es csúcsot, akkor még 4 csúcsot kell kiválasztanunk a $\{2,3,...,10\}$ halmazból, azaz a 9 elemből lesz 4 kiválasztott és 5 nem kiválasztott. Mivel a kiválasztott elemek nem kerülhetnek egymás mellé, ezért őket a nem kiválasztottak közé (vagy elé illetve utána) kell elhelyeznünk. Ezt $\binom{6}{4}$ módon tehetjük meg.
II. eset. Ha nem választottuk ki a 12-es csúcsot, akkor 5 csúcsot kell kiválasztanunk az $\{1,2,...,11\}$ halmazból, azaz a 11 elemből lesz 5 kiválasztott és 6 nem kiválasztott. Mivel a kiválasztott elemek nem kerülhetnek egymás mellé, ezért őket a nem kiválasztottak közé (vagy elé illetve utána) kell elhelyeznünk. Ezt $\binom{7}{5}$ módon tehetjük meg.
Összesen tehát $\binom{6}{4}+\binom{7}{5}=36$ ilyen ötszög létezik.

2. Fel lehet-e bontani egy négyzetet konvex ötszögekre?

Megoldás. Igen.



3. Adott néhány (három vagy annál több) egymást követő háromjegyű páratlan természetes szám. Bizonyítsd be, hogy mindig sorbarakhatjuk ezeket a számokat úgy, hogy a számok egymás mellé írásával keletkező új szám összetett szám legyen!

Megoldás. Ha öt vagy annál több egymást követő páratlan természetes számról van szó, akkor van közöttük olyan, amelyik 5-re végződik. Ha ezt a számot írjuk a sor végére, értelemszerűen összetett számot kapunk. Ha pontosan három számunk van, akkor a három szám összege osztható lesz hárommal, amiből következik, hogy az egymás mellé írással keletkező 9-jegyű szám számjegyeinek összege is osztható lesz hárommal, tehát ebben az esetben sorbarendezéstől függetlenül összetett számot kapunk. Végezetül pedig, ha négy számot figyelünk, rövid esetvizsgálattal belátható, hogy mindig létezik a számoknak olyan permutációja, amely 11-gyel osztható számot ad eredményül.

4. Bizonyítsd be, hogy csak véges sok olyan $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ polinom létezik, amelynek minden együtthatója 1 vagy -1, valamint minden gyöke valós!

Megoldás. Legyenek az $x_1, x_2, ..., x_n$ a polinom gyökei. Ekkor a Viéte-képletek alapján:

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = \left(\sum_i x_i \right)^2 - 2\left(\sum_{i<j} x_i x_j \right) = a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} \leq 3\,.$$

Másrészről, a számtani és a mértani közepekre vonatkozó összefüggés miatt

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \geq n \cdot \sqrt[n]{x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot ... \cdot x_n^2} = n\,.$$

A két összefüggésből következik, hogy legfeljebb harmadfokú polinomok elégítik ki a keresett feltételeket, azaz csak véges sok ilyen polinom létezhet.