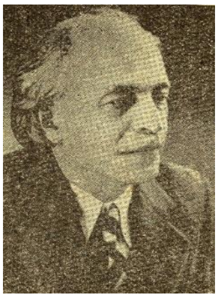


XXI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2023. december 2.

9. évfolyam

1. Egy körvonalra fölírtunk öt darab 0-t és négy darab 1-est. Ezután az azonos számok közé nullát írunk, a különböző számok közé egyest, és az eredeti számokat letöröljük. Ezt a lépést tetszőlegesen sokszor végrehajtva kaphatunk-e csupa 0-át valamelyik lépést követően?

2. Melyek azok a 7-tel osztható négyjegyű számok, amelyekre teljesül, hogy az első két számjegyükből képzett kétjegyű szám 3-mal kisebb, mint az utolsó két számjegyükből képzett kétjegyű szám?

3. Az $ABCD$ derékszögű trapézban $AB \parallel DC$, $DAB\sphericalangle = 90°$, $ABC\sphericalangle = 60°$, és M a BC oldal felezőpontja. Tudjuk, hogy a DC oldal hossza egyenlő a BC oldal hosszának felével.
a) Igazold, hogy $AC \perp DM$!
b) Számítsd ki a $\frac{T_{DMC}}{T_{ABCD}}$ arány értékét!

4. A babba törzs ábécéje csak két betűből, A-ból és B-ből áll. Leírt szókészletük olyan tulajdonságú, hogy nem létezik két olyan szó, amelyek egyike úgy kezdődik, mint a másik. Például ha létezik BA szó, akkor nem létezik más BA kezdetű szó. Tudjuk, hogy szókészletükben pontosan 1 kétbetűs, 2 hárombetűs, 4 ötbetűs és 5 hatbetűs szó található. Legfeljebb hány négybetűs szavuk lehet?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XXI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI – 9. évfolyam

1. Egy körvonalra fölírtunk öt darab 0-t és négy darab 1-est. Ezután az azonos számok közé nullát írunk, a különböző számok közé egyest, és az eredeti számokat letöröljük. Ezt a lépést tetszőlegesen sokszor végrehajtva kaphatunk-e csupa 0-át valamelyik lépést követően?

Megoldás. Számozzuk meg a kör körüli számokat 1-től 9-ig, és tegyük föl, hogy sikerült elérni a csupa 0 helyzetet. Ez csak úgy történhetett, ha az utolsó lépés előtt csupa 1-es volt fölírva a körvonalra. Az 1-esek két oldalán különböző számjegyek voltak az előző lépésben, vagyis az utolsó előtti lépés előtt a 0-k és az 1-esek váltakozva követték egymást, ami azt jelenti, hogy vagy a páros sorszámú helyeken nullák és a páratlan sorszámú helyeken egyesek voltak, vagy fordítva. Mindkét esetben a 1. és a 9. helyen (amelyek szomszédosak!) azonos számjegyek voltak, ami ellentmondás. Ezek szerint semmilyen kiindulási helyzet mellett nem kaphatunk csupa nullát.

2. Melyek azok a 7-tel osztható négyjegyű számok, amelyekre teljesül, hogy az első két számjegyükből képzett kétjegyű szám 3-mal kisebb, mint az utolsó két számjegyükből képzett kétjegyű szám?

I. megoldás. Ezek a számok csak $\overline{aba(b+3)}$ alakúak ($a \in \{1,2,...,9\}$, $b \in \{0,1,...,6\}$), vagy $\overline{ab(a+1)(b-7)}$ alakúak ($a \in \{1,2,...,8\}$, $b \in \{7,8,9\}$) lehetnek. Tudjuk, hogy az 1000, a 100 és 10 számok 7-tel osztva rendre 6, 2 és 3 maradékot adnak, így egy $\overline{ABCD}$ alakú négyjegyű szám pontosan akkor osztható héttel, ha a $6A+3B+2C+D$ kifejezés osztható 7-tel. Ezt a tényt fölhasználva az első esetben

$$6a+2b+3a+b+3=7k,$$

$$9a+3b+3=7k$$

kapjuk, ahol $k \in \mathbf{N}$. Az a és b lehetséges értékeit figyelembe véve a következő megoldásokat kapjuk:

$a \in \{1,2,...,9\}$	$9a+3b+3=7k$	$b \in \{0,1,...,6\}$	a kapott szám
1	$3b+12=7k$	3	1316
2	$3b+21=7k$	0	2023
3	$3b+30=7k$	4	3437
4	$3b+39=7k$	1	4144
5	$3b+48=7k$	5	5558
6	$3b+57=7k$	2	6265
7	$3b+66=7k$	6	7679
8	$3b+75=7k$	3	8386
9	$3b+84=7k$	0	9093

A második esetben hasonlóan kapjuk, hogy

$$6a+2b+3(a+1)+b-7=7k,$$

$$9a+3b-4=7k,$$

ahol $k \in \mathbf{N}$. Az a és b lehetséges értékeit figyelembe véve a következő megoldásokat kapjuk:

$b \in \{7,8,9\}$	$9a+3b-4=7k$	$a \in \{1,2,...,8\}$	a kapott szám
7	$9a+17=7k$	2	2730
8	$9a+20=7k$	4	4851
9	$9a+23=7k$	6	6972

Összesen 12 megoldást kaptunk, amelyek nagyság szerint a következők:
1316, 2023, 2730, 3437, 4144, 4851, 5558, 6265, 6972, 7679, 8386, 9093.

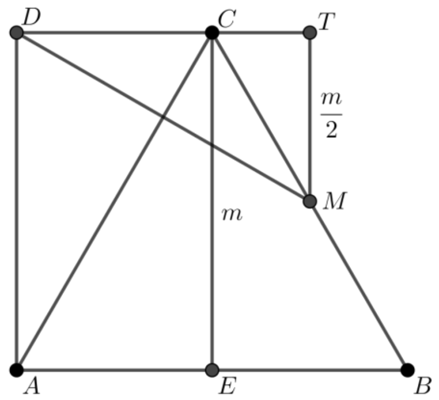
II. megoldás. Az 1013, 1114, 1215, 1316, …, 9699 számsorozatból kell kiválogatni a 7-tel oszthatókat. A számok között egyformán 101 a különbség, ami 7-tel osztva 3-at ad maradékul, így a sorozat bármely tagja héttel osztva 3-mal „nagyobb” maradékosztályba esik, mint az előző. Az 1013-as szám hetes maradéka 5, így a sorozat tagjai 7-tel osztva a következő maradékokat adják: 5, 1, 4, 0, 3, 6, 2, 5, 1, 4, 0, …., vagyis az 1316-os számtól minden 7. osztható 7-tel, és ezek a következők: 1316, 2023, 2730, 3437, 4144, 4851, 5558, 6265, 6972, 7679, 8386, 9093.

3. Az $ABCD$ derékszögű trapézban $AB \parallel DC$, $DAB\sphericalangle = 90°$, $ABC\sphericalangle = 60°$, és M a BC oldal felezőpontja. Tudjuk, hogy a DC oldal hossza egyenlő a BC oldal hosszának felével.

a) Igazold, hogy $AC \perp DM$!

b) Számítsd ki a $\frac{T_{DMC}}{T_{ABCD}}$ arány értékét!

Megoldás. a) Legyen E pont az ABC háromszög C pontjából húzott magasságának a talppontja. Ekkor EBC egy félszabályos háromszög (tehát $2EB = BC$), $AECD$ pedig egy téglalap (tehát $AE = CD$). Ezekből következik, hogy $EB = \frac{BC}{2} = DC = AE$. Ezzel beláttuk, hogy ABC háromszög egyenlő szárú, méghozzá $ABC\sphericalangle = 60°$ miatt szabályos, így $ACB\sphericalangle = 60°$. Könnyű megállapítani, hogy a trapéz BCD szöge $120°$. A DMC háromszög a feladat feltételei alapján egyenlő szárú, és a fentiek szerint CA szakasz a szögfelezője, márpedig az egyenlő szárú háromszög szárai által képzett szög szögfelezője merőleges az alappal, vagyis $AC \perp DM$. Ezt kellett belátni.



b) Legyen a T pont a DC oldal C felőli meghosszabbításán úgy, hogy $DT \perp TM$, valamint $CE = m$. Ekkor

$$\frac{T_{DMC}}{T_{ABCD}} = \frac{\frac{DC \cdot TM}{2}}{\frac{AB+DC}{2} \cdot CE} = \frac{\frac{a \cdot \frac{m}{2}}{2}}{\frac{2a+a}{2} \cdot m} = \frac{a \cdot \frac{m}{2}}{3am} = \frac{1}{6}.$$

4. A babba törzs ábécéje csak két betűből, A-ból és B-ből áll. Leírt szókészletük olyan tulajdonságú, hogy nem létezik két olyan szó, amelyek egyike úgy kezdődik, mint a másik. Például ha létezik BA szó, akkor nem létezik más BA kezdetű szó. Tudjuk, hogy szókészletükben pontosan 1 kétbetűs, 2 hárombetűs, 4 ötbetűs és 5 hatbetűs szó található. Legfeljebb hány négybetűs szavuk lehet?

Megoldás. A törzs szótárában összesen $2^6 = 64$ hatbetűs szó lehet. Az 1 darab kétbetűs szó kizárja 2^4 hatbetűsnek a létezését. A 2 darab hárombetűs szó kizárja $2 \cdot 2^3$ hatbetűs szó létezését. A 4 darab ötbetűs szó kizárja $4 \cdot 2$ darab hatbetűs, szó létezését. Ezen felül van még 5 hatbetűs szó.

$$2^4 + 2 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2 + 5 = 45 .$$

Maradt eddig összesen $64 - 45 = 19$ lehetséges hatbetűs szó. Egy négybetűs szó létezése 4 hatbetűs szót zár ki, tehát legfeljebb 4 darab négybetűs szó létezhet, és ez meg is történhet:
Kétbetűsek: AA;
Hárombetűsek: ABA, ABB;
Négybetűsek: BAAA, BAAB, BABA, BABB;
Ötbetűsek: BBAAA, BBAAB, BBABA, BBABB;
Hatbetűsek: BBBAAA, BBBAAB, BBBABA, BBBABB, BBBBAA.