XIV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2016. december 3.

7. évfolyam

1. **A** 2016 **olyan négyjegyű szám, amelynek ha az utolsó számjegyét elosztom az első számjegyével, akkor az első három számjegyének összegét kapom, azaz** $6:2=2+0+1$**. Hány ilyen tulajdonságú négyjegyű szám van összesen?**

2. Pista leírt egy számsorozatot, amelynek első három tagja: 1, 0, 2**. A következő tagot úgy kapta meg, hogy az előző kettőt összeszorozta (**$0\cdot 2$**), majd a kapott szorzathoz hozzáadta a közvetlenül előttük lévőt:** $0\cdot 2+1=1$**. Ekkor a sorozat már négytagú lett:** 1, 0, 2, 1**. Majd folytatta ennek a szabálynak az alkalmazását mindaddig, amíg el nem jutott a sorozat** 2016**. tagjáig. Vajon a** 2016**. tag páros vagy páratlan szám?**

3. Az ABC **háromszög** AB **oldalán adott a** D **pont, az** AC **oldalán pedig az** E **pont úgy, hogy a** DEB **töröttvonal az** ABC **háromszöget három egyenlő területű háromszögre osztja. Az** ADE **háromszög egy** $6\ cm$ **oldalú szabályos háromszög. Mekkora az** AB **és az** AC **oldal hossza? Lehet-e a** BC **oldal hossza** $14\ cm$**?**

4. Anna Csókáról biciklizett hazafelé. Azt tervezte, hogy 15:00 **órakor ér haza. Mivel az út** 3/4 **részét a tervezett idő** 2/3**-a alatt tette meg, ezért lassított és így a tervezett időre ért haza. Milyen arányban van az „első” sebesség a „második” sebességgel?**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XIV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
MEGOLDÁSOK – 7. évfolyam

1. **A** 2016 **olyan négyjegyű szám, amelynek ha az utolsó számjegyét elosztom az első számjegyével, akkor az első három számjegyének összegét kapom, azaz** $6:2=2+0+1$**. Hány ilyen tulajdonságú négyjegyű szám van összesen?**

Megoldás: Rendszerezzük a keresett számokat az első majd az utolsó számjegyük szerint emelkedő sorrendben:

1 _ _ 1	1 db (középen 00 áll)
1 _ _ 2	2 db (középen 01 és 10 állhat)
1 _ _ 3	3 db (középen 02, 11, 20 állhat)
1 _ _ 4	4 db (középen 03, 12, 21, 30 állhat)
1 _ _ 5	5 db (középen 04, 13, 22, 31, 40 állhat)
1 _ _ 6	6 db (középen 05, 14, 23, 32, 41, 50 állhat)
1 _ _ 7	7 db (középen 06, 15, 24, 33, 42, 51, 60 állhat)
1 _ _ 8	8 db (középen 07, 16, 25, 34, 43, 52, 61, 70 állhat)
1 _ _ 9	9 db (középen 08, 17, 26, 35, 44, 53, 62, 71, 80 állhat)
2 _ _ 4	1 db (középen 00 áll)
2 _ _ 6	2 db (középen 01, 10 állhat)
2 _ _ 8	3 db (középen 02, 11, 20 állhat)
3 _ _ 9	1 db (középen 00 áll)

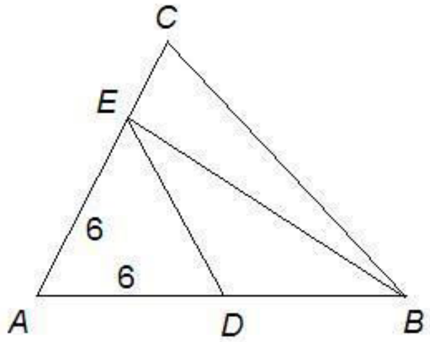
Összesen: $1+2+3+4+5+6+7+8+9+1+2+3+1=45+7=52$, tehát 52 ilyen szám létezik.

2. Pista leírt egy számsorozatot, amelynek első három tagja: 1, 0, 2**. A következő tagot úgy kapta meg, hogy az előző kettőt összeszorozta (**$0\cdot 2$**), majd a kapott szorzathoz hozzáadta a közvetlenül előttük lévőt:** $0\cdot 2+1=1$**. Ekkor a sorozat már négytagú lett:** 1, 0, 2, 1**. Majd folytatta ennek a szabálynak az alkalmazását mindaddig, amíg el nem jutott a sorozat** 2016. **tagjáig. Vajon a** 2016. **tag páros vagy páratlan szám?**

Megoldás: Konkrét számok helyett számoljunk azok paritásával: Jelölje n a páratlan, s pedig a páros számokat. Ekkor a sorozat első három tagját így írhatjuk föl: n,s,s. A 4. tag: $s\cdot s+n=s+n=n$. Az első négy tag így: n,s,s,n. Az ötödik tag: $s\cdot n+s=s+s=s$. Az első öt tag: n,s,s,n,s. A hatodik tag: $n\cdot s+s=s+s=s$. Így az első hat tag: n,s,s,n,s,s. Mivel a sorozatképzési szabály csak a legutolsó 3 tagot veszi figyelembe, és az utolsó három tag megegyezik azzal a három taggal, amely a 3. tag képzése után volt utolsó három, így a további tagok is úgy folytatódnak, ahogyan a sorozat a 4. tagtól folytatódik. Ezt a gondolatmenetet megismételve kapjuk a következő sorozatot: $n,s,s,n,s,s,n,s,s,n,s,s,\dots$.

A sorozatban azokon a sorszámú helyeken, amelyek hárommal oszthatóak, s áll. Ilyen szám a 2016 is, így a 2016. helyen is s áll.

3. Az ABC háromszög AB oldalán adott a D pont, az AC oldalán pedig az E pont úgy, hogy a DEB töröttvonal az ABC háromszöget három egyenlő területű háromszögre osztja. Az ADE háromszög egy $6\ cm$ oldalú szabályos háromszög. Mekkora az AB és az AC oldal hossza? Lehet-e a BC oldal hossza $14\ cm$?



Megoldás: Tekintsük a mellékelt ábrát. Ha a DEB töröttvonal harmadolja a háromszöget, akkor az ED szakasz felezi az ABE háromszöget, így D felezőpontja az AB oldalnak, vagyis $AB = 12\ cm$.
Továbbá, ha DEB töröttvonal harmadolja a háromszöget, akkor az EB szakasz $2:1$ arányban osztja a területét, vagyis az E pont is $2:1$ arányban osztja az AC oldalt, tehát $AC = 9\ cm$.
A háromszög A csúcsnál lévő szöge $60°$, a másik két szög közül egyik szög kisebb, a másik nagyobb nála. Ez igaz a szemben fekvő oldalakra is, vagyis a BC oldal $9\ cm$-nél nagyobb és $12\ cm$-nél kisebb, tehát nem lehet $14\ cm$ hosszú.

4. Anna Csókáról biciklizett hazafelé. Azt tervezte, hogy 15:00 órakor ér haza. Mivel az út 3/4 részét a tervezett idő 2/3-a alatt tette meg, ezért lassított és így a tervezett időre ért haza. Milyen arányban van az „első” sebesség a „második” sebességgel?

Megoldás: Az első sebességgel az út 3/4 részét az egész útra tervezett idő 2/3-a alatt tette meg. Mivel egyenletesen haladt, ezért fele annyi idő alatt fele annyi utat tett meg, vagyis 1/3 idő alatt az út 3/8-át. Lassítás után az út hátralévő 1/4 részét az egész útra szánt idő 1/3-a alatt tette meg. Ezek szerint azonos idő alatt az első sebességgel az út 3/8-át, a második sebességgel 1/4 részét tette meg. Az azonos idő alatt megtett utak úgy aránylanak egymáshoz, mint a sebességek, tehát

$$v_1 : v_2 = \frac{3}{8} : \frac{1}{4} = \frac{3}{8} : \frac{2}{8} = 3:2,$$

vagyis a keresett arány $3:2$.