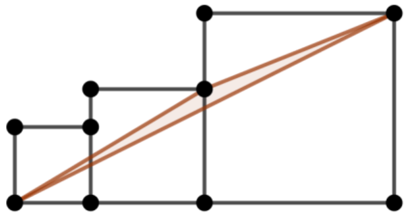
XXI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2023. december 2.

<u>8. évfolyam</u>

1. Emese hétfőn, szerdán, pénteken és vasárnap igazat mond, a hét többi napján pedig hazudik. Milyen nap van ma, ha az öt állítás közül pontosan négyet mondott ma?
- Holnap hazudni fogok.
- A hét négy napján igazat mondok.
- Ma csütörtök vagy kedd van.
- Ünnepnapokon soha nem hazudok.
- Tegnap szombat volt.

2. Lehet-e 2023 **egész szám szorzata és összege is** 2023**?**

3. Az ábrán 3 **négyzet és egy satírozott háromszög látható. Határozd meg a háromszög területét és kerületét, ha ismert, hogy a négyzetek oldalai** $2\ cm$**,** $3\ cm$ **és** $5\ cm$**.**



4. Marci a négyzet alakú kertjébe épített egy négyzet alakú medencét, a megmaradt $56\ m^2$**-es területet pedig fűvel vetette be. Mekkora lehet Marci kertjének kerülete, ha tudjuk, hogy oldala méterekben kifejezve négyzetszám, a medence oldala pedig prímszám?**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XXI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI – 8. évfolyam

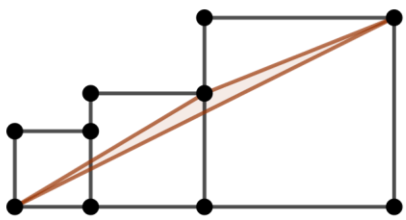
1. Emese hétfőn, szerdán, pénteken és vasárnap igazat mond, a hét többi napján pedig hazudik. Milyen nap van ma, ha az öt állítás közül pontosan négyet mondott ma?
- Holnap hazudni fogok.
- A hét négy napján igazat mondok.
- Ma csütörtök vagy kedd van.
- Ünnepnapokon soha nem hazudok.
- Tegnap szombat volt.

Megoldás. A második mondat igaz. A negyedik mondat hamis. Mivel 4 mondatot egy napon mondott, ezért a megmaradt három mondat mindegyike igaz, vagy mindegyike hamis kell, hogy legyen. A harmadik és az ötödik mondat ellentmondanak egymásnak, így nem lehetnek igazak, azaz az első, harmadik és ötödik mondat is hamis. Hazudós nap van: kedd, csütörtök vagy szombat. A harmadik mondat miatt a keddet és csütörtököt kizárhatjuk. A szombat megfelel a másik két állításnak is. Szombat van.

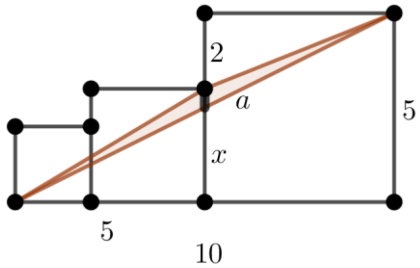
2. Lehet-e 2023 egész szám szorzata és összege is 2023?

Megoldás. Először foglalkozzunk a szorzattal. Mivel $2023=7\cdot17^2$, így ha a tényezők között szerepel a 7 és a 17 kétszer, pozitív vagy negatív előjellel, akkor a maradék 2020 tényező pedig csak 1 vagy -1 lehet. Ha összegként írjuk fel:
I. 7, 17, 17 esetén: mivel $7+2\cdot17=41$, még a 1982 számot kell felírni 2020 szám (1 és -1) összegeként. Ez lehetséges, ha 1982-ször felírjuk az 1-et, hogy elérjük a 2023-as összeget, majd még 19 darab 1-ből és -1-ből álló párossal bővítjük a sort. Viszont ekkor páratlan számú -1-et használunk, azaz a szorzat -2023 lenne.
II. -7, 17, 17 esetén: hasonlóan gondolkodva 12 darab 1-ből és -1-ből álló párt kapunk. Így tizenhárom negatív szám lenne a számjegyek között, azaz a szorzat ismét negatív lenne.
III. 7, -17, 17 esetén: 2016 egyes mellett két darab 1-ből és -1-ből álló párt kell felírnunk, ami megint páratlan számú negatív előjelű tényezőt jelent a szorzatban, azaz ez a lehetőség sem felel meg.
IV. Ha két vagy több egytől nagyobb abszolút értékű szám kapna negatív előjelet, akkor a 2023 szám összege nem érhetné el a 2023-at.
Viszont észrevehetjük, hogy a 2023-at más formában is felírhatjuk tényezők szorzataként, például $7\cdot289$, vagy $17\cdot119$, sőt akár csak a 2023 és 1-esek és -1-esek felhasználásával. Ezen felírásokat is hasonló módon kivizsgálhatjuk, és megállapíthatjuk, hogy sosem találunk megfelelő összeadandókat illetve tényezőket.

3. Az ábrán 3 négyzet és egy satírozott háromszög látható. Határozd meg a háromszög területét és kerületét, ha ismert, hogy a négyzetek oldalai $2\ cm$, $3\ cm$ és $5\ cm$.



Megoldás. A háromszög kerülete könnyen kiszámítható Pitagorasz tételének alkalmazásával:
$K = \sqrt{5^2 + 3^3} + \sqrt{2^2 + 5^2} + \sqrt{5^2 + 10^2} = \sqrt{34} + \sqrt{29} + \sqrt{125}\ cm.$
A terület kiszámításához osszuk a háromszöget két részre az ábra szerint:



A két kis háromszögnek közös az alapja és a magasságaik is megegyeznek: $a = 3 - x$ és $h = 5$. Az alap kiszámításához vegyük észre az ábrán a hasonló háromszögeket és írjuk fel a következő aránypárt:
$5 : x = 10 : 5$ Innen már látható, hogy $x = \frac{5}{2}$, ezért az alap $a = \frac{1}{2}$.

A területképletbe behelyettesítve: $T = 2 \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot 5}{2} = \frac{5}{2}\ cm^2$.

4. Marci a négyzet alakú kertjébe épített egy négyzet alakú medencét, a megmaradt $56\ m^2$-es területet pedig fűvel vetette be. Mekkora lehet Marci kertjének kerülete, ha tudjuk, hogy oldala méterekben kifejezve négyzetszám, a medence oldala pedig prímszám?

Megoldás. Legyen a kert oldala a, a medence oldala pedig b.
A feladat szövege alapján a következő összefüggést írhatjuk fel: $a^2 - b^2 = 56$. Mivel egész számokat keresünk, a tényezőrebontás segíthet a megoldás megtalálásában:
$(a-b)(a+b) = 56 = 1 \cdot 56 = 2 \cdot 28 = 4 \cdot 14 = 8 \cdot 7$
Innen már egyértelműen felírhatóak a megoldandó kétismeretlenes egyenletrendszerek. Könnyen észrevehetjük, hogy ha az egyik tényező páratlan, akkor a keresett számok nem lesznek egészek, így csak azokkal az esetekkel foglalkozunk, ahol mindkét tényező páros.

I.
$a - b = 2$
$\underline{a + b = 28}$
Ekkor $a = 15$, $b = 13$, ami nem felel meg a feladat feltételeinek, hiszen a 15 nem négyzetszám.

II.
$a - b = 4$
$\underline{a + b = 14}$
Ekkor $a = 9$, $b = 5$, ami megfelel a feltételeknek. Ekkor $K = 4 \cdot a = 36$.
Marci kertjének kerülete $36\ m$.