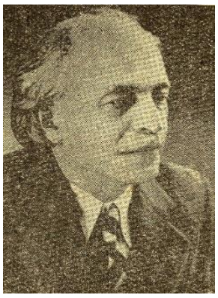


XVII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2019. december 8.

<u>8. évfolyam</u>

1. Egy 10×10-es táblázatot a kitöltünk az 1-től 100-ig terjedő természetes számokkal a következő módon: a bal felső sarokból indulva elkezdjük írni a számokat 1-től kezdve, egyesével növelve az értékeket, jobb felé haladva, minden mezőbe egy számot, míg a sor végére nem érünk. Ekkor áttérünk a második sorba, és ott folytatjuk a számok írását az előző sorhoz hasonló módon, és így tovább, míg a táblázat jobb alsó sarkába bekerül a 100-as szám. A kitöltött táblázatból kiválasztunk tízet úgy, hogy minden sorból és minden oszlopból pontosan 1 számot választunk ki. Mi lehet a kiválasztott számok összege?

2. Az ABC derékszögű háromszög AB átfogójához tartozó magassága CM. A K pont az AC befogón helyezkedik el, és $KBC\angle = BAC\angle$. A CM és KB szakaszok metszéspontja E. Mutasd meg, hogy ekkor teljesül az $EK = EB$ egyenlőség!

3. Létezik-e $\overline{abcabc}$ alakú négyzetszám? Válaszodat indokold!

4. Hány olyan pozitív egész szám létezik, amelyet 26-tal, illetve 29-el osztva a hányados megegyezik a maradékkal? Melyek ezek a számok?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XVII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI – 8. évfolyam

1. Egy 10×10-es táblázatot a kitöltünk az 1-től 100-ig terjedő természetes számokkal a következő módon: a bal felső sarokból indulva elkezdjük írni a számokat 1-től kezdve, egyesével növelve az értéket, jobb felé haladva, minden mezőbe egy számot, míg a sor végére nem érünk. Ekkor áttérünk a második sorba, és ott folytatjuk a számok írását az előző sorhoz hasonló módon, és így tovább, míg a táblázat jobb alsó sarkába bekerül a 100-as szám. A kitöltött táblázatból kiválasztunk tízet úgy, hogy minden sorból és minden oszlopból pontosan 1 számot válasszunk ki. Mi lehet a kiválasztott számok összege?

Megoldás: A táblázat helyesen kitöltve a szöveg alapján:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Így is megmutathatjuk:

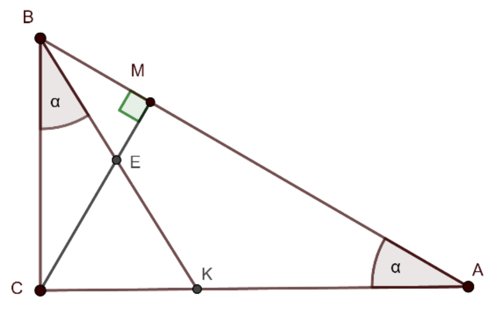
0+1	0+2	0+3	0+4	0+5	0+6	0+7	0+8	0+9	0+10
10+1	10+2	10+3	10+4	10+5	10+6	10+7	10+8	10+9	10+10
20+1	20+2	20+3	20+4	20+5	20+6	20+7	20+8	20+9	20+10
30+1	30+2	30+3	30+4	30+5	30+6	30+7	30+8	30+9	30+10
40+1	40+2	40+3	40+4	40+5	40+6	40+7	40+8	40+9	40+10
50+1	50+2	50+3	50+4	50+5	50+6	50+7	50+8	50+9	50+10
60+1	60+2	60+3	60+4	60+5	60+6	60+7	60+8	60+9	60+10
70+1	70+2	70+3	70+4	70+5	70+6	70+7	70+8	70+9	70+10
80+1	80+2	80+3	80+4	80+5	80+6	80+7	80+8	80+9	80+10
90+1	90+2	90+3	90+4	90+5	90+6	90+7	90+8	90+9	90+10

Könnyen belátható, hogy ha minden sorból választunk pontosan egy elemet, akkor biztosan lesz az összeadandók között $0+,\ 10+,\ 20+,\ \dots\ \textit{és}\ 90+$ kezdetű is. Mivel minden oszlopból is választunk pontosan 1 elemet, biztosan lesz pontosan egy $+1,\ +2,\ +3,\ \dots,+9\ \textit{és}\ +10$ befejeződésű az összeadandók között. Tehát csak ki kell számolnunk a következő összeget:

$$(0+10+20+....+90)+(1+2+3+\ \dots\ +9+10)=505.$$

Bárhogyan válogatunk is a táblázat elemei között, az összeg mindig 505 lesz.

2. Az ABC derékszögű háromszög AB átfogójához tartozó magassága CM. A K pont



az AC befogón helyezkedik el, és $KBC\angle = BAC\angle$.
A CM és KB szakaszok metszéspontja E.
Mutasd meg, hogy ekkor teljesül az $EK = EB$ egyenlőség!

Megoldás: Megoldás: $MCB\angle = BAC\angle$, mivel mindkettő $ABC\angle$ pótszöge, ezért a CEB háromszög egyenlő szárú. $MCK\angle$ pótszöge a $BAC\angle$-nek, valamint $CKB\angle$ pótszöge a $BAC\angle$ szöggel egyenlő, ezért $KCE\angle = CKE\angle$, azaz CKE háromszög is egyenlő szárú. Ebből következik, hogy $CE=EK$ és $KE=EB$.

3. Létezik-e $\overline{abcabc}$ alakú négyzetszám? Válaszodat indokold!

Megoldás: Végezzük el a következő átalakítást:

$\overline{abcabc} = 1001(100a+10b+c) = 7 \cdot 11 \cdot 13(100a+10b+c)$.

Mivel 7, 11 és 13 prímszámok, ezért a $100a+10b+c$ kifejezés osztható kell, hogy legyen 1001-el, ami lehetetlen, hiszen lehető legnagyobb értéke 999.

Nem létezik $\overline{abcabc}$ alakú négyzetszám.

4. Hány olyan pozitív egész szám létezik, amelyet 26-tal, illetve 29-el osztva a hányados megegyezik a maradékkal? Melyek ezek a számok?

Megoldás: Jelölje x a keresett számot. Ekkor a következő összefüggések írhatók fel:

$$x = 26a + a,\ a \le 25 \qquad \text{és} \qquad x = 29b + b,\ b \le 28,$$

ahol a és b természetes szám.
Ebből a két egyenletből következik, hogy $27a = 30b$, azaz $9a = 10b$, amely egyenletnek a következő számpárok lehetnek megoldásai: $a = 10$ és $b = 9$, és $a = 20$ és $b = 18$.
A keresett számok tehát a 270 és az 540.