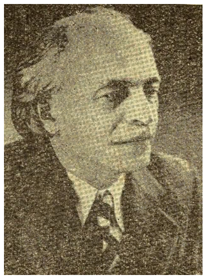

XII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2014. december 6.

6. évfolyam

1. Hány olyan háromjegyű szám van, amelyben a páros számjegyek száma páratlan?

2. Egy könyv oldalait megszámoztuk 1-gyel kezdve és 2014-gyel bezárólag. Számozás közben hányszor írtuk le az 1-es számjegyet?

3. A „*MATEK*” szó minden betűjének megfeleltetünk egy számjegyet. A számjegyekre igazak a következők:

$$M + A + T + E + K = 21,$$
$$M + A + T = 12,$$
$$A \cdot T = 21,$$
$$T + E = 8,$$
$$K : M = 2.$$

Melyik ötjegyű számot rejti a „*MATEK*” szó?

4. Egy kocka minden lapját pirosra vagy kékre festhetjük. Hány különböző kockát tudunk így készíteni, ha csak azokat a kockákat tekintjük különbözőnek, amelyeket elmozgatással nem lehet fedésbe hozni?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

MEGOLDÁSOK – 6. évfolyam

1. Hány olyan háromjegyű szám van, amelyben a páros számjegyek száma páratlan?

I.Megoldás: Háromjegyű számok esetén, ha a páros számjegyek száma páratlan, akkor egy vagy három páros számjegyet tudunk leírni. Egy páros számjegy esetén, 350 ilyen háromjegyű szám van (100 db, amikor a százasok helyén áll a páros számjegy; 125-125 db, amikor a tizesek vagy az egyesek helyén áll a páros számjegy). Három páros számjegy esetén, $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$ ilyen háromjegyű szám van. Összesen 450 ilyen háromjegyű szám van.

II.Megoldás: $9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$ ilyen háromjegyű szám van. A százasok helyén nem lehet 0. Így, a százasok helyére 9 számjegy közül választhatunk. A második jegy lehet nulla is, tehát itt 10 számjegy közül választhatunk. Ha eddig páros számú páros számjegyet választottunk, akkor az utolsó jegy 0, 2, 4, 6 vagy 8 lehet. Ha eddig páratlan számú páros számjegyet választottunk, akkor az utolsó jegy 1, 3, 5, 7 és 9 lehet. Mivel mindkét esetben 5 lehetőség van, így összesen $9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$ lehetőség van.

2. Egy könyv oldalait megszámoztuk 1-gyel kezdve és 2014-gyel bezárólag. Számozás közben hányszor írtuk le az 1-es számjegyet?

Megoldás: Ha a számokat tízesével csoportosítjuk, akkor az egyesek helyén minden csoportban 1 darab 1-es lesz. 2000-ig 200 csoport van, ez 200 darab 1-est jelent, és a 2001-ben illetve a 2011-ben van még 2 darab 1-es, így az egyesek helyén összesen 202 darab 1-es van.

Ha a számokat százasával csoportosítjuk, akkor a tízesek helyén minden csoportban 10 darab 1-es lesz. 2000-ig 20 csoport van, ez 200 darab 1-est jelent (2001-től 2014-ig van még 5 darab 1-es), így az tízesek helyén összesen 205 darab 1-es van.

A százasok helyén az első ezer számban és a második ezer számban is 100-100 darab, tehát összesen 200 darab 1-es van.

Az ezresek helyén 1000-től 1999-ig minden számban van 1-es, ezek száma 1000.

Tehát az 1-esek száma $202 + 205 + 200 + 1000 = 1607$.

3. A „*MATEK*” szó minden betűjének megfeleltetünk egy számjegyet. A számjegyekre igazak a következők:

$$M + A + T + E + K = 21,$$
$$M + A + T = 12,$$
$$A \cdot T = 21,$$
$$T + E = 8,$$
$$K : M = 2.$$

Melyik ötjegyű számot rejti a „MATEK**” szó?**

Megoldás: A harmadik egyenletből $A \cdot T = 21$, ahonnan következik, hogy $A = 3$ és $T = 7$ vagy $A = 7$ és $T = 3$.
a) Ha $A = 3$ és $T = 7$, akkor a $T + E = 8$ egyenlőségből következik, hogy $E = 1$.
$M + A + T + E + K = 21$ és $M + A + T = 12$ egyenlőségek miatt $12 + 1 + K = 21$, azaz $K = 8$.
$M + A + T = 12$ egyenlőségből következik, hogy $M + 3 + 7 = 12$, tehát $M = 2$.
Ekkor viszont $K : M = 2$ nem teljesül, tehát ez nem megoldás.
b) Ha $A = 7$ és $T = 3$, akkor a $T + E = 8$ egyenlőségből következik, hogy $E = 5$.
$M + A + T + E + K = 21$ és $M + A + T = 12$ egyenlőségek miatt $12 + 5 + K = 21$, azaz $K = 4$.
$M + A + T = 12$ egyenlőségből következik, hogy $M + 7 + 3 = 12$, tehát $M = 2$.
Ekkor $K : M = 2$ is teljesül. A kapott számok valamennyi egyenletet igazzá teszik.
A keresett ötjegyű szám: 27354.

4. Egy kocka minden lapját pirosra vagy kékre festhetjük. Hány különböző kockát tudunk így készíteni, ha csak azokat a kockákat tekintjük különbözőnek, amelyeket elmozgatással nem lehet fedésbe hozni?

Megoldás:
Számoljuk meg a különböző színezéseket aszerint, hogy hány lap piros:
- amikor a piros lapok száma 0, akkor 1 színezés lehetséges,
- amikor a piros lapok száma 1, akkor 1 színezés lehetséges,
- amikor a piros lapok száma 2, akkor 2 színezés lehetséges (a két piros lap vagy élben lesz szomszédos, vagy pedig két szemközti lap),
- amikor a piros lapok száma 3, akkor 2 színezés lehetséges (két szemközti lap és valamelyik oldalsó lap piros, vagy 3 olyan lap, melyeknek van egy közös csúcsa),
- amikor a piros lapok száma 4, akkor 2 színezés lehetséges (ha a piros lapok száma 4, akkor a kék lapok száma 2, a két kék lap vagy élben lesz szomszédos, vagy pedig két szemközti lap),
- amikor a piros lapok száma 5, akkor 1 színezés lehetséges,
- amikor a piros lapok száma 6, akkor 1 színezés lehetséges.

Összegezve: 10 különböző módon lehet a kocka lapjait két színnel színezni.