Megoldás, megoldhatóság, optimális megoldások és persze algoritmusok

Illés Tibor
Corvinus Operációkutatási Kutatóközpont
Budapesti Corvinus Egyetem

Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium
Zenta, 2023. december 1.

Lineáris egyenletrendszer: példa

Példa. Béla 3 évvel ezelőtt háromszor annyi idős volt, mint András; 3 év múlva pedig csak kétszer annyi idős lesz. Hány évesek most?

Megoldás.
Döntési változóink: x és y, amelyek András és Béla ismeretlen életkorát jelölik.

3 évvel ezelőtt: $y - 3 = 3\,(x - 3)$

3 év múlva: $y + 3 = 2\,(x + 3)$

A következő két ismeretlenes *lineáris egyenletrendszer*t kapjuk

$$\begin{aligned} y - 3\,x &= -6 \\ y - 2\,x &= 3 \end{aligned}$$

y	x	
1	-3	-6
1	-2	3

y	x	
1	-3	-6
0	1	9

y	x	
1	0	21
0	1	9

András 9, és Béla 21 éves.

Lineáris egyenletrendszer: definíció

Legyen adott az $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix és a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ vektor. Az

$$A\,\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{1}$$

*lineáris egyenletrendszer*t részletesen az

$$\begin{aligned}
a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n \quad &= \quad b_1 \\
a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_n \quad &= \quad b_2 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad & \qquad\quad \vdots \\
a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \cdots + a_{mn}\,x_n \quad &= \quad b_m
\end{aligned}$$

alakban írhatjuk ki, ahol az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jelöli az ismeretleneket vagy vektor egyenlet formájában

$$x_1\,\mathbf{a}_1 + x_2\,\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\,\mathbf{a}_n = \mathbf{b}, \tag{2}$$

ahol az $\mathbf{a}_i$ az A mátrix i. oszlop vektora. A (2) egyenletet *megoldható*nak nevezzük, ha létezik $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$ vektor, amelyre

$$s_1\,\mathbf{a}_1 + s_2\,\mathbf{a}_2 + \cdots + s_n\,\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

teljesül. Az $\mathbf{x} = \mathbf{s}$ vektort az egyenletrendszer *megoldás*ának nevezzük.

Lineáris egyenletrendszer: megoldhatóság

Lemma. Legyen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ és $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Az alábbi állítások ekvivalensek:

(i) az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ megoldható;

(ii) $\mathbf{b}$ vektor előáll, mint az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n$ vektorok lineáris kombinációja;

(iii) $rang(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n) = rang(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b})$. $\triangleleft$

Rouché–Kronecker–Capelli lemma. Legyen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ és $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Az $(\mathcal{E}_1)$ és $(\mathcal{E}_2)$ lineáris egyenletrendszerek közül pontosan az egyik oldható meg:

$(\mathcal{E}_1)$ $\quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}$;

$(\mathcal{E}_2)$ $\quad \mathbf{y}^T A = \mathbf{0}, \;\; \mathbf{y}^T \mathbf{b} = 1.$

Leopold Kronecker (1823 – 1891)
Eugéne Rouché (1832 – 1910)
Alfredo Capelli (1855 – 1910)

Lineáris egyenletrendszer: pivot tábla

Az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenlet adatait az alábbi módon foglalhatjuk (rövid) pivot táblába

$$\begin{array}{c|cccc|c|}
 & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n & \mathbf{b} \\
\hline
\mathbf{e}_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
\mathbf{e}_2 & a_{21} & a_{22} & & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\mathbf{e}_m & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \\
\hline
\end{array}$$

ahol az $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^m$ az m-dimenziós valós vektortér i. egységvektora. Nyilván

$$\mathbf{a}_j = a_{1j}\,\mathbf{e}_1 + a_{2j}\,\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{mj}\,\mathbf{e}_m,$$

teljesül bármely $j = 1, 2, \ldots, n$ esetén.

Elemi sor transzformációk:

1. egy sort valamely $\lambda \neq 0$ valós számmal megszorozzuk;
2. egy sor nem nulla szorosát valamely másik sorhoz hozzáadjuk;
3. két sort felcserélünk.

Gauss-Jordan eliminációs algoritmus

Legyen adott egy $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix és a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ vektor.
Legyen $i = 1$ és $j = 1$.

1. lépés. **Ha** $a_{ij} = 0$ **akkor** keressünk egy $m \geq k > i$ indexet, amelyre $a_{kj} \neq 0$.
Ha $\exists k : a_{kj} \neq 0$ **akkor** cseréljük ki az i. sort a k. sorral,
különben növeljük a j index értékét 1-gyel, amíg $j < n$.
Ha $j = n$ és $m \geq k \geq i : a_{kj} = 0$ **akkor** *STOP*.

2. lépés. Osszuk el az i. sort az $a_{ij} \neq 0$ értékkel [*elemi sor transzformáció*],
ekkor az (i, j) pozíción álló pivot elem értéke 1 lesz.

3. lépés. Elimináljuk a j. oszlop nem nulla elemeit [*elemi sor transzformáció*].

4. lépés. Növeljük az i és j indexek értékét 1-gyel, amíg $i < m$ és $j < n$,
különben *STOP*.
Menjünk az *1. lépésre.* ■

A Gauss-Jordan eliminációs módszer leáll miután az utolsó sort vagy oszlopot megvizsgálta. Az eredmény egy *redukált sor lépcsős mátrix*.

A Gauss-Jordan eliminációs módszer **leállási kritérium**ai: (i) megoldja a feladatot, vagy (ii) talál egy ellentmondásos egyenletet.

Tétel. [Edmonds, 1967] Lineáris egyenletrendszerek, Gauss–Jordan eliminációs módszerrel, erősen polinomiális időben megoldhatók, azaz $\mathcal{O}(m^2 n)$ az algoritmus aritmetikai komplexitása.

Gauss-Jordan eliminációs algoritmus: alkalmazása

Feladat. *[Dr. Zoran Stojaković, Lineáris Algebra, II. füzet, fordította: Petković Zoltán, okl. mat., Szabadka, 1982, 159. oldal, Kidolgozott feladatok, 1. módosítása.]*

Az a paraméter mely értékeire lesz megoldható az alábbi lineáris egyenletrendszer?

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 1 \\ x - 2y + 2z &= 2 \\ x + 4y + 2z &= a \end{aligned}$$

Megoldás.

	x	y	z	b
	1	1	2	1
	1	-2	2	2
	1	4	2	a

	x	y	z	b
x	1	1	2	1
	0	-3	0	1
	0	3	0	$a-1$

	x	y	z	b
x	1	1	2	1
	0	-3	0	1
	0	0	0	a

Ha $a = 0$ akkor a lineáris egyenletrendszer megoldható !

	x	y	z	b
x	1	1	2	1
	0	1	0	$-1/3$

	x	y	z	b
x	1	0	2	$4/3$
y	0	1	0	$-1/3$

általános megoldás

$$\begin{aligned} x &= 4/3 - 2z \\ y &= -1/3 \end{aligned}$$

Mit mondhatunk ha az $a \neq 0$ teljesül?

Ellentmondásos lineáris egyenletrendszer: elemzés

Legyen

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix},\ \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix},\ \text{ekkor} \quad x\,\mathbf{a}_1 + y\,\mathbf{a}_2 + z\,\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}$$

a lineáris egyenletrendszer vektor alakja. Ha az $a \neq 0$ akkor a $\mathbf{b}$ vektor nem állítható elő az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ vektorok lineáris kombinációjaként.

Az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenlet adatait az alábbi módon foglalhatjuk *teljes pivot táblába*

$$\begin{array}{c|cccc|c|cccc|}
 & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n & \mathbf{b} & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_m \\
\hline
\mathbf{e}_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
\mathbf{e}_2 & a_{21} & a_{22} & & a_{2n} & b_2 & 0 & 1 & & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\mathbf{e}_m & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m & 0 & 0 & \cdots & 1 \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{|ccc|c|ccc|}
x & y & z & b & & & \\
\hline
1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & -2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 4 & 2 & a & 0 & 0 & 1 \\
\hline
\end{array}
\quad x \quad
\begin{array}{|ccc|c|ccc|l}
x & y & z & b & & & & \\
\hline
1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & -3 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & a & -2 & 1 & 1 & \mathbf{u} \\
\hline
\end{array}$$

kompozíciós tulajdonság: $\mathbf{u}^T A = \mathbf{u}^T[\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3] = (0\ 0\ 0)$, $\mathbf{u}^T\mathbf{b} = a$, *[ortogonalitási tétel]*

Rouché–Kronecker–Capelli lemma: bizonyítás

Rouché-Kronecker-Campelli lemma. Az $(\mathcal{E}_1)$ és $(\mathcal{E}_2)$ közül pontosan az egyik oldható meg:

$(\mathcal{E}_1)$ $\quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}$;

$(\mathcal{E}_2)$ $\quad \mathbf{y}^T A = \mathbf{0}, \ \ \mathbf{y}^T \mathbf{b} = 1.$

Bizonyítás. A kettő egyszerre nem állhat fenn (indirekt bizonyítás):

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \text{megszorozzuk} \quad \mathbf{y}^T \quad \text{ekkor} \quad 0 = \mathbf{0}^T\mathbf{x} = (\mathbf{y}^T A)\,\mathbf{x} = \mathbf{y}^T(A\,\mathbf{x}) = \mathbf{y}^T\mathbf{b} = 1$$

Alkalmazzuk a *Gauss–Jordan eliminációs módszer*t a lineáris egyenletrendszerre.
1. megállási kritérium: az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egy megoldását kapjuk.
2. megállási kritérium: ekkor találtunk egy ellentmondásos egyenletet (pl. a j. egyenlet legyen ellentmondásos), azaz $\quad 0\,x_1 + 0\,x_2 + \ldots + 0\,x_n = b_j, \quad$ ahol a $b_j \neq 0$. Pivotáljunk a b_j elemen, ekkor az alábbi teljes pivot táblát (*teljes bázis táblát*) nyerjük:

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|c|}
 & \multicolumn{2}{c}{J} & \multicolumn{1}{c}{b} & \multicolumn{2}{c}{I} \\
\cline{2-6}
\mathcal{J}''_B & \begin{matrix}1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1\end{matrix} & & & & 0 \\
\cline{2-6}
b & 0 \ \ldots \ 0 & 0 \ \ldots \ 0 & 1 & & 0 \ \ldots \ 0 \\
\cline{2-6}
\mathcal{I}''_B & 0 & 0 & & & \begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix} \\
\cline{2-6}
\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{J''_B} & \multicolumn{1}{c}{\bar{\mathcal{J}}''_B} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\bar{\mathcal{I}}''_B} & \multicolumn{1}{c}{I''_B}
\end{array}
$$

Lineáris egyenletrendszer: összefoglaló

- Megoldhatóság: Rouché–Kronecker–Capelli lemma
- Megoldási módszer: Gauss–Jordan eliminációs algoritmus
- Megoldási módszer komplexitása [elméleti hatékonyság]: $\mathcal{O}(m^2 n)$
- Megoldási módszer alkalmazási területei: mátrix inverz kiszámítása, lineáris függetlenség eldöntése, stb.
- Megoldási módszer numerikus tulajdonságai, számítógépes hatékonysága, stb.

Farkas lemma

Farkas lemma, 1894. Az alábbi két *lineáris egyenlőtlenségrendszer* közül pontosan az egyike oldható meg:

$$\left.\begin{array}{rcl} A\mathbf{x} & = & \mathbf{b} \\ \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0} \end{array}\right\} \quad (\mathcal{R}_1) \qquad\qquad \left.\begin{array}{rcl} \mathbf{y}^T A & \leq & \mathbf{0} \\ \mathbf{y}^T \mathbf{b} & = & 1 \end{array}\right\} \quad (\mathcal{R}_2)$$

ahol $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *mátrix*, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ *vektor*. Az ismeretlenek n illetve m elemű vektorai az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$.

Farkas Gyula (1847–1930)

- Farkas Gyula (1847 – 1930)
- Haár Alfréd (1885 – 1933)
- Hermann Minkowski (1864 – 1909)
- lineáris egyenlőtlenség rendszerek megoldhatósága
- konvex testek elmélete
- mechanikai egyensúlyelmélet
- lineáris programozás, mátrix játékok

Példa: lineáris egyenlőtlenségrendszerek megoldása?

Oldjuk meg az alábbi feladatot:

$$\begin{array}{rrrrrrcr} x_1 & -\,x_2 & +x_3 & +2x_4 & +\,x_5 & & = & 0 \\ & & x_3 & +3x_4 & +3x_5 & +x_6 & = & 5 \\ 2x_1 & -2x_2 & +x_3 & +\,x_4 & -\,x_5 & -x_6 & = & -5 \end{array}$$

ahol $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
1	−1	1	2	1	0	0
0	0	1	3	3	1	5
2	−2	1	1	−1	−1	−5

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_1	1	−1	1	2	1	0	0
	0	0	1	3	3	1	5
	0	0	−1	−3	−3	−1	−5

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_1	1	−1	1	2	1	0	0
	0	0	1	3	3	1	5
	0	0	0	0	0	0	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_1	1	−1	0	−1	−2	−1	−5
x_3	0	0	1	3	3	1	5
	0	0	0	0	0	0	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_1	1	−1	0	−1	−2	−1	−5
x_3	0	0	1	3	3	1	5

A Gauss-Jordan eliminációs módszerrel lineáris egyenlőtlenségrendszert nem (feltétlenül) lehet megoldani.

Lineáris egyenlőtlenségrendszerek megoldása: elemzés

$$\begin{array}{c|cccccc|c|l} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & b & \\ \hline x_1 & 1 & -1 & 0 & -1 & -2 & -1 & -5 & \mathbf{a}^{(1)} \\ x_3 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1 & 5 & \mathbf{a}^{(2)} \\ \hline \end{array}$$

Megengedett bázis megoldás: $\tilde{\mathbf{x}}^T = (0\ 5\ 5\ 0\ 0\ 0)$

$$\begin{array}{c|cccccc|c|l} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & b & \\ \hline x_2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 5 & \mathbf{t}^{(1)} \\ x_3 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1 & 5 & \mathbf{t}^{(2)} \\ \hline \end{array}$$

pivot tábla bázis indexei $J_B = \{2, 3\}$ és nem bázis indexei $J_N = \{1, 4, 5, 6\}$

Bázis táblák tulajdonsága: ortogonalitás

$$\mathbf{t}_1^T = (-1\ -1\ 0\ 0\ 0\ 0), \quad \mathbf{t}_4^T = (0\ 1\ 3\ -1\ 0\ 0), \quad \mathbf{t}_5^T = (0\ 2\ 3\ 0\ -1\ 0), \quad \mathbf{t}_6^T = (0\ 1\ 1\ 0\ 0\ -1).$$

Bármely $j \in J_N$ és $i = 1, 2$ esetén $\mathbf{t}_j^T \mathbf{a}^{(i)} = 0$ és $\mathbf{t}_j^T \mathbf{t}^{(i)} = 0.$ Sőt $A\,\mathbf{t}_j = \mathbf{0}.$

Ortogonalitási tétel. Tetszőleges $\{\mathbf{a}_j \mid j \in \mathcal{J}\}$ vektorrendszerhez tartozó B' és B'' bázisokra, és indexhalmazaikra $\mathcal{J}_{B'}$ és $\mathcal{J}_{B''}$, igaz a következő összefüggés

$$\mathbf{t}'^{(i)\,T}\,\mathbf{t}''_j = 0, \qquad \forall i \in \mathcal{J}_{B'} \text{ és } \forall j \in \bar{\mathcal{J}}_{B''}.$$

Új megoldás előállítása: $\mathbf{x}^+ = \tilde{\mathbf{x}} + \lambda\,\mathbf{t}_j \geq \mathbf{0}$, alkalmas $\lambda \in \mathbb{R}$

A $j = 6$ esetén $5 + \lambda \geq 0$, $-\lambda \geq 0$ egyenlőtlenségekhez jutunk, azaz $\lambda \in [-5, 0]$ esetén az $\mathbf{x}^+$ megengedett megoldása a lineáris egyenlőtlenségrendszernek.

Lineáris egyenlőtlenségrendszerek vizsgálata

Az $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}\}$, $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\} \subset \mathbb{R}^m$ vektorok és $\mathcal{J} = \{1, 2, \ldots, n\}$, $\mathcal{I} = \{\hat{1}, \hat{2}, \ldots, \hat{m}\}$ index halmazok.

Farkas-Minty tipusú lemma. Az alábbi két rövid bázis tábla közül pontosan az egyik állhat elő:

$$
\begin{array}{c|c|c|c|}
 & \bar{\mathcal{J}}'_B & b & \bar{\mathcal{I}}'_B \\
\hline
\mathcal{J}'_B & & \begin{matrix}\oplus \\ \vdots \\ \oplus\end{matrix} & \\
\hline
\mathcal{I}'_B & 0 & \begin{matrix}0 \\ \vdots \\ 0\end{matrix} & \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|c|c|}
 & \bar{\mathcal{J}}''_B & \bar{\mathcal{I}}''_B \\
\hline
\mathcal{J}''_B & & \\
\hline
b & \ominus \;\ldots\; \ominus & \\
\hline
\mathcal{I}''_B & 0 & \\
\hline
\end{array}
$$

Bizonyítás. A két tábla egyszerre nem állhat fenn: indirekt bizonyítás.

$$
\begin{array}{r|c|c|c|c|c|}
 & \mathcal{J}'_B & \bar{\mathcal{J}}'_B & b & \mathcal{I}'_B & \bar{\mathcal{I}}'_B \\
\hline
\mathbf{t}'_b = & \oplus \ldots \oplus & 0 \;\ldots\; 0 & -1 & 0 \;\ldots\; 0 & 0 \;\ldots\; 0 \\
\hline
\\
\hline
\mathbf{t}''_b = & \multicolumn{2}{c|}{\ominus \ldots \qquad \ominus} & 1 & \multicolumn{2}{c|}{* \;\ldots \qquad *} \\
\hline
 & \multicolumn{2}{c}{\mathcal{J}''_B} & & \multicolumn{2}{c}{\mathcal{I}''_B}
\end{array}
$$

Ekkor a $\quad 0 = (\mathbf{t}'_b)^T\, \mathbf{t}''_b = -1 + \ominus < 0, \quad$ de ez ellentmond az ortogonalitási tételnek.

Farkas-Minty tipusú lemma bizonyítása

A két tábla közül az egyik fennáll: cseréljünk ki annyi $\mathbf{e}_i$ (bázis) vektort $\mathbf{a}_j$ vektorral, amennyit csak lehet. Ha leáll ez az eljárás, akkor vagy még a **b** vektort is bevonhatjuk a bázisba (2. tábla speciális esete teljesül), vagy az alábbi táblához jutunk (előző lemma 1. táblája).

	$\bar{\mathcal{J}}_B$	b	$\bar{\mathcal{I}}_B$
$\mathcal{J}_B$		$*$ $\vdots$ $*$	
$\mathcal{I}_B$	0	0 $\vdots$ 0	

Criss-cross algoritmus. *[Klafszky E. és Terlaky T., Pivot technika szerepe a lineáris algebra néhány alapvető tételének a bizonyításában, Alk. Mat. Lapok, 14 (1989) 425-448.]*

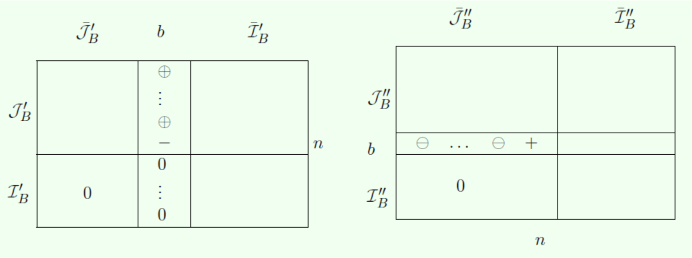
$[b \notin \mathcal{J}_B]$ **Ha** a **b** oszlopában a $\mathcal{J}_B$ indexekhez tartozó együtthatók között csupa nemnegatív szám van **akkor** az első táblát kaptuk. **Különben** legyen $r = \min\{i \in \mathcal{J}_B : t_{ib} < 0\}$ és pivotáljunk a t_{rb} elemen. A **b** vektor bekerül a bázisba, és az $\mathbf{a}_r$ vektor távozik.

$[b \in \mathcal{J}_B]$ **Ha** a **b** sorában a $\bar{\mathcal{J}}_B = \mathcal{J}_N$ indexekhez tartozó együtthatók között csupa nempozitív szám van **akkor** a második táblát kaptuk. **Különben** legyen $s = \min\{j \in \mathcal{J}_N : t_{bj} > 0\}$ és pivotáljunk a t_{bs} elemen. A **b** vektor távozik a bázisból, és az $\mathbf{a}_s$ vektor belép. •

Az eljárás a kívánt két eset valamelyikével ér véget, ha egyáltalán leáll. (Ha nem áll le, akkor azt mondjuk, hogy *ciklizál* az eljárás, mert véges sok bázisunk van és így legalább egy végtelen sokszor visszatér.) Azt kell igazolnunk, hogy a Criss-cross algoritmus véges.

A criss-cross algoritmus: végesség

Indirekt bizonyítás: tegyük fel, hogy ciklizál az algoritmus, valamely adott vektorrendszer esetén. Az ilyen példák közül vegyünk egy minimális méretű pédát. A példa minimalitása miatt a ciklus során minden változó belép, majd (később) távozik a bázisból. Vizsgáljuk azokat az eseteket, amikor az $\mathbf{a}_n$ vektor belép a bázisba illetve távozik onnan. Ehhez a két esethez tartozó táblákat mutatja be a következő ábra.



Alkalmazzuk az ortogonalitási tételt: egyszerű számítás alapján $0 = {\mathbf{t}'_b}^T \mathbf{t}''_b < 0$ adódik. *Ellentmondás.*

Esetünkben ez azt jelenti, hogy az algoritmusunk nem ciklizálhat. Ezzel a Farkas-Minty lemma bizonyítását is befejeztük.

Farkas lemma bizonyítása

Azt, hogy az $(\mathcal{R}_1)$ és $(\mathcal{R}_2)$ lineáris egyenlőtlenségrendszereknek egyszerre nem lehet megoldása már beláttuk.

Az **egyik megoldható**: alkalmazzuk az előző Farkas-Minty lemmát az $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}\}$ vektorrendszerre.

1. tábla: $\sum_{i \in \mathcal{J}_B} t_{ib}\, \mathbf{a}_i = \mathbf{b}$, ahol $t_{ib} \geq 0$. Ekkor $x_i = t_{ib}$, $i \in \mathcal{J}_B$ és $x_j = 0$, $j \in \bar{\mathcal{J}}_B$.
2. tábla: a teljes pivot tábla a következő alakú

	$\mathcal{J}$		b	$\mathcal{I}$	
$\mathcal{J}''_B$	$1 \ddots 1 \ddots 1$				0
b	$0 \ \dots \ 0$	$\ominus \ \dots \ \ominus$	1		$0 \ \dots \ 0$
$\mathcal{I}''_B$	0	0			$1 \ddots 1$
	$\mathcal{J}''_B$	$\bar{\mathcal{J}}''_B$		$\bar{\mathcal{I}}''_B$	$\mathcal{I}''_B$

Legyen $y_i = t_{bi}$ ahol $i \in \mathcal{I}$. A kompozíciós tulajdonság alapján az $\mathbf{y}$ megoldja a 2. rendszert. •

Lineáris programozási feladatpár

A *lineáris programozás*i *primál* és *duál* feladatok legyenek a következő alakban adottak

$$\left.\begin{array}{lcc} \min & \mathbf{c}^T\mathbf{x} & \\ A\mathbf{x} & = & \mathbf{b} \\ \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0} \end{array}\right\} \quad (P) \qquad\qquad \left.\begin{array}{lcc} \max & \mathbf{b}^T\mathbf{y} & \\ A^T\mathbf{y} & \leq & \mathbf{c} \end{array}\right\} \quad (D)$$

ahol $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ és $\mathbf{y}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Az általánosság korlátozása nélkül feltehető, hogy $rang(A) = m$.

Legyen a *primál* illetve a *duál megengedett megoldás*ok halmaza rendre

$$\mathcal{P} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_\oplus \ \mid \ A\mathbf{x} = \mathbf{b}\} \quad \text{és} \quad \mathcal{D} := \{(\mathbf{y}, \mathbf{s}) \in \mathbb{R}^{m+n} \mid \ A^T\mathbf{y} + \mathbf{s} = \mathbf{c}, \ \mathbf{s} \geq \mathbf{0}\}.$$

Gyenge dualitás tétel. Legyenek adottak a (P) és (D) feladatok. Ekkor bármely $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$ és $\mathbf{y} \in \mathcal{D}$ esetén $\mathbf{c}^T\mathbf{x} \geq \mathbf{b}^T\mathbf{y}$ és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{x}^T\mathbf{s} = 0$, ahol $\mathbf{s} = \mathbf{c} - A^T\mathbf{y}$.

A *primál* illetve a *duál optimális megoldások halmaza* a

$$\mathcal{P}^* := \{\mathbf{x}^* \in \mathcal{P} \ : \ \mathbf{c}^T\mathbf{x}^* \leq \mathbf{c}^T\mathbf{x}, \ \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{P}\}, \quad \text{és a} \quad \mathcal{D}^* := \{\mathbf{y}^* \in \mathcal{D} \ : \ \mathbf{b}^T\mathbf{y}^* \geq \mathbf{b}^T\mathbf{y}, \ \ \forall \mathbf{y} \in \mathcal{D}\}.$$

Gyenge equilibrium tétel. Legyenek adottak a (P) és (D) feladatok. Legyen továbbá $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{P}$ és $\bar{\mathbf{y}} \in \mathcal{D}$, amelyek esetén $\mathbf{c}^T\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{b}^T\bar{\mathbf{y}}$ ekkor $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{P}^*$ és $\bar{\mathbf{y}} \in \mathcal{D}^*$.

Lineáris programozás: optimalitási feltételek

Erős dualitás tétel. Ha a $\mathcal{P} \neq \emptyset$ és a $\mathcal{D} \neq \emptyset$ akkor a $\mathcal{P}^* \neq \emptyset$ és a $\mathcal{D}^* \neq \emptyset$ •

Az *optimalitási kritériumok*, a gyenge dualitás tétel alapján, az alábbi formában írhatók

$$
\begin{array}{rrrcll}
 & A\,\mathbf{x} & & = & \mathbf{b}, & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \\
A^T\mathbf{y}+ & & \mathbf{s} & = & \mathbf{c}, & \mathbf{s} \geq \mathbf{0}, \\
-\mathbf{b}^T\mathbf{y}+ & \mathbf{c}^T\mathbf{x} & & \leq & 0. &
\end{array}
$$

Az utolsó feltétel erősebb formában:

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} - \mathbf{b}^T\mathbf{y} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{x}^T\mathbf{s} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{x}\,\mathbf{s} = \mathbf{0}.$$

Lineáris programozás *optimalitási feltételei* *lineáris egyenlőtlenség rendszer*re vezetnek.

L. V. Kantorovich (1912 – 1986) [lineáris programozási modellt vezetett be termelés tervezésére, 1939], és T. C. Koopmans (1910 – 1985) [erőforrások optimális felhasználása a termelésben, 1942] közgazdasági Nobel-emlékdíj, 1975.

Neumann János (1903 – 1957) mátrix játékok alaptétele (1928), lineáris programozás erős dualitás tétele, dualitás elmélete.

Lineáris programozás: algoritmusok

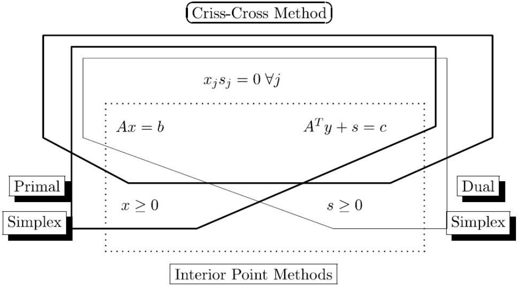


Fig. 1. Characteristics of algorithms for LO.

- pivot módszerek: szimplex algoritmus, criss-cross algoritmus, MBU szimplex algoritmus, Magyar-módszer
- belsőpontos módszerek: projektív skálázású algoritmus, affin skálázású algoritmus, büntetőfüggvényes algoritmusok, útkövető algoritmusok
- külsőpontos módszer: ellipszoid algoritmus

Lineáris programozás: kutatók

A képeken szereplő kutatók:

- **1. kép:** Klafszky és tanítványai 1994-ben Ann Arborban a 15. ISMP konferencián: Kas Péter, Klafszky Emil, Terlaky Tamás
- **2. kép:** Georg B. Dantzig és Leonyid G. Hacsián a Stanford Egyetemen
- **3. kép:** Naredra K. Karmarkar

Lineáris programozás: algoritmusok

- George B. Dantzig (1914 – 2005), lineáris programozás, szimplex módszer (1947, 1951), lineáris programozás alkalmazása
- Ragnar A. K. Frisch (1895 – 1973), multiplex algoritmus [logaritmikus barrier módszer] (1957)
- Ilija Dikin, affin skálázású belsőpontos algoritmus (1967)
- Leonid G. Khachiyan (1952 – 2005), ellipszoid módszer (1979)
- Narendra K. Karmarkar (1957 –), projektív skálázású belsőpontos algoritmus (1984)
- Terlaky Tamás (1955 –), criss-cross algoritmus (1984), MBU szimplex algoritmus (1994), magyar módszer (1991), belsőpontos algoritmusok
- ...

- pivot algoritmusok: szimplex algoritmus, criss-cross algoritmus, MBU szimplex algoritmus, ... – végesek, exponenciális lépésszámúak
- belsőpontos algoritmusok: projektív skálázású algoritmus, affin skálázású algoritmus, útkövető algoritmus, büntetőfüggvényes algoritmus, ... – rövid lépéses $\mathcal{O}(L\, n^3)$; hosszú lépéses $\mathcal{O}(L\, n^{3.5})$ algoritmusok
- külsőpontos algoritmus: ellipszoid módszer $\mathcal{O}(L\, n^4)$

Lineáris egyenlőtlenségrendszer: algoritmusok

- J. B. Joseph Fourier (1768 – 1830) és Theodore S. Motzkin (1908 – 1970), Fourier–Motzkin eliminációs módszer (1826, 1936)
- G.B. Dantzig, szimplex módszer elsőfázis feladat (1951)
- Klafszky Emil (1934 – 2009), Terlaky Tamás criss–cross algoritmus (1991)
- F. Bilen, Csizmadia Zs. és Illés T., MBU szimplex algoritmus (2007)
- ...

- Fourier–Motzkin eliminációs módszer (1826, 1936) – véges, kétszer exponenciális algoritmus.
- Szimplex algoritmus, criss–cross algoritmus, MBU szimplex algoritmus – véges, exponenciális algoritmus.
- Gyakorlatban hatékony módszerek: szimplex algoritmus, MBU szimplex algoritmus.

Lineáris programozás: szimplex módszer

A lineáris programozási *primál* feladata

$$\min \quad \mathbf{c}^T\mathbf{x} \;\text{ feltéve, hogy }\; A\mathbf{x} = \mathbf{b},\; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

ahol $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ és $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Továbbá feltehető, hogy $rang(A) = m$.
Az A_B megengedett bázishoz tartozó teljes pivot tábla a következő:

$A_B^{-1}A$	$A_B^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{c}^T - \mathbf{c}_B^T A_B^{-1} A$	$-\mathbf{c}_B A_B^{-1}\mathbf{b}$