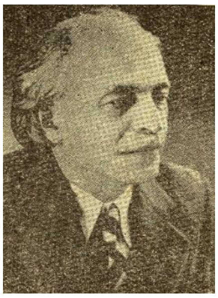
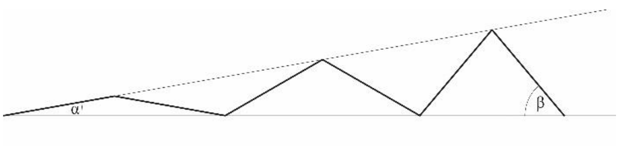


XVII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2019. december 8.

7. évfolyam

1. Négy lány a következőket állítja:
Anna: Bea hazudik.
Bea: Cili hazudik.
Cili: Dóri hazudik.
Dóri: A többiek mindannyian hazudnak.
Ki mond igazat és ki hazudik?

2. Az ábrán vastagon húzott 6 **szakasz egyenlő hosszúságú.**
***a*) hány fokos a β szög, ha $\alpha = 5°$?**
***b*) hány fokos a β szög, ha $\alpha = 20°$?**



***c*) Bizonyára észrevetted, hogy a fenti esetek egyikében a feladat nem megoldható. Szerinted legfeljebb mekkora lehet az α szög, hogy a szerkesztés (vagy számítás) mind a** 6 **lépése elvégezhető legyen? Válaszodat részletesen indokold meg!**

3. Egy négyzet alakú süteményt egymással egybevágó négyzet alakú szeletekre szeltek fel. Kelekótya, a cukrászsegéd belopózott a raktárba, és a szélső szeleteket, valamint az egyik átlón lévő szeleteket is bevonta rózsaszínű cukormázzal. Így összesen 404 **sütiszelet lett rózsaszínű. Hány szelet süti van még a tálcán, ami nem rózsaszínű?**

4. Peti talált 3 **számkártyát. Ezek mindegyike egy-egy számjegyet tartalmazott. Nem volt két egyforma számkártya a három között. Peti kirakta a kártyákból az összes lehetséges háromjegyű számot, és fejben összeadta őket. Az így kapott összeg egy olyan különleges szám, amit meg lehet kapni két szomszédos természetes szám szorzataként is. Milyen számjegyek voltak a kártyákon?**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

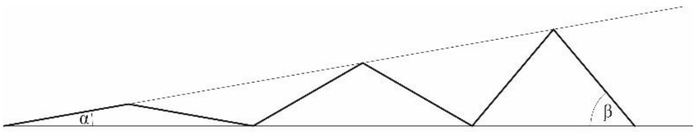
Jó munkát!

XVII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI – 7. évfolyam

1. Négy lány a következőket állítja:
Anna: Bea hazudik.
Bea: Cili hazudik.
Cili: Dóri hazudik.
Dóri: A többiek mindannyian hazudnak.
Ki mond igazat és ki hazudik?

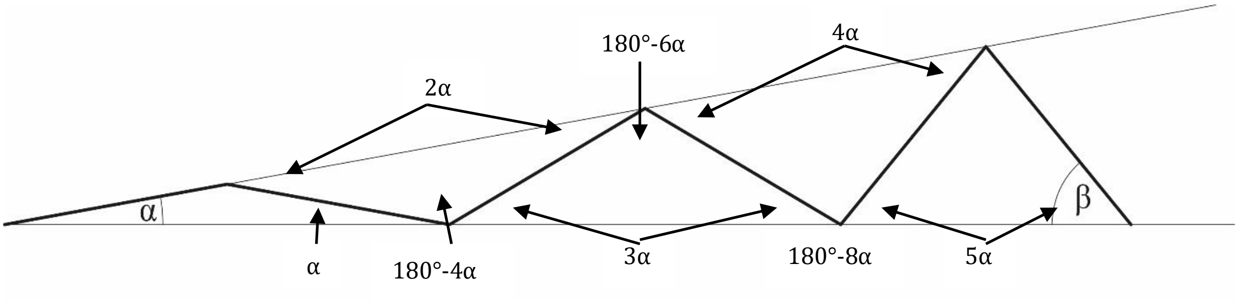
Megoldás: Ha Anna hazudik, akkor Bea igazat mond, azaz Cili hazudik, ezért Dóri igazat mond. Ez ellentmondás, ezért Anna nem hazudhat.
Mivel Anna igazat mond, Bea hazudik, azaz Cili igazat mond, Dóri pedig hazudik. Ha Dóri hazudik, akkor van olyan lány aki igazat mond. Ebben az esetben Anna és Cili mond igazat.

2. Az ábrán vastagon húzott 6 szakasz egyenlő hosszúságú.
***a*) Hány fokos a β szög, ha $\alpha = 5°$?**
***b*) Hány fokos a β szög, ha $\alpha = 20°$?**



***c*) Bizonyára észrevetted, hogy a fenti esetek egyikében a feladat nem megoldható. Szerinted legfeljebb mekkora lehet az α szög, hogy a szerkesztés (vagy számítás) mind a 6 lépése elvégezhető legyen? Válaszodat részletesen indokold meg!**

Megoldás:
***a*)** Az ábrán valójában 3 db „alapján fekvő” és 2 db „fejtetőn álló” egyenlőszárú háromszöget látunk. Az alapján fekvő háromszögek alapon fekvő szögei rendre: $5°$, $15°$, $25°$. Tehát a keresett szög $25°$ méretű.
***b*)** Az első két alapjukon fekvő háromszög alapon fekvő szögei: $20°$ és $60°$. A harmadik háromszög alapon fekvő szöge már $100°$ kellene hogy legyen, ami lehetetlen.
***c*)** Általános esetben a szögek méretét az ábrán ábrázoltuk:



Az ábra alapján látható, hogy $\beta = 5\alpha$. Mivel β egy egyenlőszárú háromszög alapon fekvő szöge, nem lehet sem tompaszög, sem derékszög, tehát $\beta < 90°$. Ezért $5\alpha < 90°$, ami azt jelenti, hogy $\alpha < 18°$.

3. Egy négyzet alakú süteményt egymással egybevágó négyzet alakú szeletekre szeltek fel. Kelekótya, a cukrászsegéd belopózott a raktárba, és a szélső szeleteket, valamint az egyik átlón lévő szeleteket is bevonta rózsaszínű cukormázzal. Így összesen 404 **sütiszelet lett rózsaszínű. Hány szelet süti van még a tálcán, ami nem rózsaszínű?**

Megoldás: Tegyük fel, hogy a táblát n sorra és n oszlopra osztották fel. A tábla szélein lévő rózsaszínű sütik száma $4n$ lenne, de így a sarkokon lévő sütiket duplán számítottuk, ezért a szegélyen $4n-4$ rózsaszínű süti található. Az átlón $n-2$ süti helyezkedik el (mivel a szegélyt alkotó sütiket már nem számítjuk).
Így a rózsaszínű sütik száma $(4n-4)+(n-2)$, azaz $5n-6$.
Mivel tudjuk, hogy 404 rózsaszínű süti van, meg kell oldanunk az $5n-6=404$ egyenletet. Az eredmény $n=82$. Az egész tálca sütemény $82^2=6724$ sütiből áll, ebből **6320 nem rózsaszínű**.

4. Peti talált 3 **számkártyát. Ezek mindegyike egy-egy számjegyet tartalmazott. Nem volt két egyforma számkártya a három között. Peti kirakta a kártyákból az összes lehetséges háromjegyű számot, és fejben összeadta őket. Az így kapott összeg egy olyan különleges szám, amit meg lehet kapni két szomszédos természetes szám szorzataként is. Milyen számjegyek voltak a kártyákon?**

Megoldás: Jelölje a három számjegyet *a*, *b* és *c*. Ezekből összesen 6 különböző háromjegyű számot lehet alkotni: $100a+10b+c$, $100a+10c+b$, $100b+10a+c$, $100b+10c+a$, $100c+10b+a$ és $100c+10a+b$. Ha összeadjuk a hat számot, az eredmény $222a+222b+222c=222(a+b+c)$. Mivel $222=2\cdot3\cdot37$, ez az összeg $2\cdot3\cdot37\cdot(a+b+c)$ formában is felírható. Mivel a 37 szomszédai közül csak a 36 osztható 2-vel és 3-mal is, arra törekszünk, hogy $2\cdot3\cdot(a+b+c)=36$ legyen. Tehát $a+b+c=6$. Mivel *a*, *b* és *c* egymástól különböző számok, így csak **az 1, 2 és 3 számjegyek** felelnek meg ennek a feltételnek.
(Kiegészítés: mivel a feladat nem zárta ki a 0-ás számkártya létezését, és számkártyából kirakható a pl. a 042 is, elfogadható még a 0,1,5 valamint a 0,2,4 számhármas is megoldásként.)