XVI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2018. december 1.

11. évfolyam

1. **Határozd meg a következő egyenletrendszer minden valós megoldását:**

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{2018} = 2018,$$
$$x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_{2018}^4 = x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_{2018}^3.$$

2. Egy derékszögű háromszög α és β hegyesszögeire érvényes, hogy

$$\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{tg}^2\beta + \mathrm{tg}^3\alpha + \mathrm{tg}^3\beta = 70.$$

Számítsd ki az adott derékszögű háromszög hegyesszögeit!

3. Az ABC háromszögben az $ABC\angle$ szögfelezője metszi a háromszög körülírt körét D pontban. Bizonyítsd be, hogy teljesül a $BD^2 > BA \cdot BC$ egyenlőtlenség!

4. A röplabda-bajnokságon összesen tíz csapat versenyzett, minden csapat minden másik csapattal játszott egy mérkőzést. A verseny végén az első csapatnak x_1 győzelme és y_1 veresége volt, második csapatnak x_2 győzelme és y_2 veresége volt, harmadik csapatnak x_3 győzelme és y_3 veresége volt, stb. Igazold, hogy ekkor teljesül az $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{10}^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{10}^2$ egyenlőség!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XVI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
MEGOLDÁSOK – 11. évfolyam

1. Határozd meg a következő egyenletrendszer minden valós megoldását:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{2018} = 2018,$$

$$x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_{2018}^4 = x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_{2018}^3.$$

Megoldás: Kezdőhelyzetben az egyenletrendszer ekvivalens a következő egyenletrendszerrel:

$$(x_1 - 1) + (x_2 - 1) + \ldots + (x_{2018} - 1) = 0$$

$$x_1^3 \cdot (x_1 - 1) + x_2^3 \cdot (x_2 - 1) + \ldots + x_{2018}^3 \cdot (x_{2018} - 1) = 0$$

A második egyenletből kivonva az első egyenletet kapjuk a következőt:

$$(x_1^3 - 1) \cdot (x_1 - 1) + (x_2^3 - 1) \cdot (x_2 - 1) + \ldots + (x_{2018}^3 - 1) \cdot (x_{2018} - 1) = 0.$$

Felbontva a köbök különbségét és rendezve kapjuk a következőt:

$$(x_1 - 1)^2 \cdot (x_1^2 + x_1 + 1) + (x_2 - 1)^2 \cdot (x_2^2 + x_2 + 1) + \ldots + (x_{2018} - 1)^2 \cdot (x_{2018}^2 + x_{2018} + 1) = 0 \ .$$

Mivel minden x_k valós számra $x_k^2 + x_k + 1 > 0$, $k = 1, 2, \ldots, 2018$, ezért $x_k = 1, \quad k = 1, 2, \ldots, 2018$.

2. Egy derékszögű háromszög α és β hegyesszögeire érvényes, hogy

$$\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{tg}^2\beta + \mathrm{tg}^3\alpha + \mathrm{tg}^3\beta = 70.$$

Számítsd ki az adott derékszögű háromszög hegyesszögeit!

Megoldás: Váltsunk komplemens szögekre, azaz írjunk fel mindent α segítségével:

$$\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\alpha + \mathrm{tg}^3\alpha + \mathrm{ctg}^3\alpha = 70.$$

Ha a $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha$ kifejezést négyzetre és köbre emeljük, akkor:

$$(\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha)^2 = \mathrm{tg}^2\alpha + 2\mathrm{tg}\alpha\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{ctg}^2\alpha = \mathrm{tg}^2\alpha + 2 + \mathrm{ctg}^2\alpha$$

$$(\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha)^3 = \mathrm{tg}^3\alpha + 3\mathrm{tg}^2\alpha\mathrm{ctg}\alpha + 3\mathrm{tg}\alpha\mathrm{ctg}^2\alpha + \mathrm{ctg}^3\alpha = \mathrm{tg}^3\alpha + 3(\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha) + \mathrm{ctg}^3\alpha,$$

tehát

$$\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\alpha = (\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha)^2 - 2 \text{ és}$$

$$\mathrm{tg}^3\alpha + \mathrm{ctg}^3\alpha = (\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha)^3 - 3(\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha).$$

Az $x = \mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha$ helyettesítéssel következik, hogy

$$x + (x^2 - 2) + (x^3 - 3x) = 70, \text{ vagyis } x^3 + x^2 - 2x - 72 = 0,$$

amelynek egyik megoldása

$$x = 4, \text{ tehát } (x - 4) \cdot (x^2 + 5x + 18) = 0.$$

Mivel az $x^2 + 5x + 18$ trinom minden valós x-re pozitív, ezért az egyetlen megoldás $x = 4$, azaz $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha = 4$, ez utóbbi megoldásai pedig $\mathrm{tg}\alpha = 2 \pm \sqrt{3}$.

A keresett hegyesszögek tehát $15°$ és $75°$.

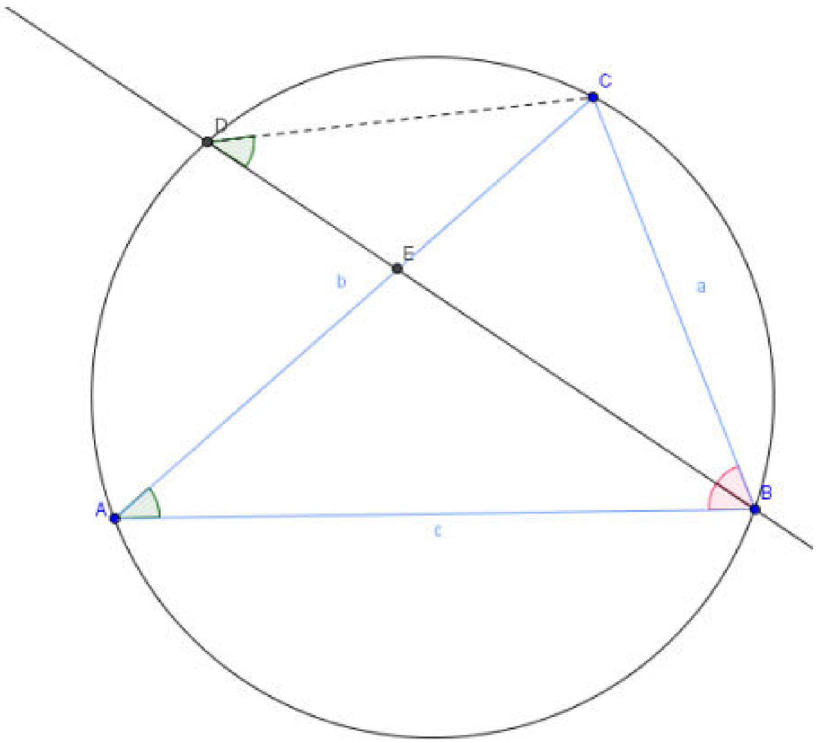
3. Az ABC háromszögben az $ABC\angle$ szögfelezője metszi a háromszög körülírt körét D pontban. Bizonyítsd be, hogy teljesül a $BD^2 > BA \cdot BC$ egyenlőtlenség!

Megoldás: Legyen az E pont az $ABC\angle$ szögfelezője és a szemköztes oldal metszéspontja. Mivel $ABD\angle \cong DBC\angle$ és $BAC\angle \cong BDC\angle$, ezért a BAE és BDC háromszögek hasonlóak, vagyis megfelelő oldalaik arányosak:

$$BA : BE = BD : BC, \text{ azaz } BD \cdot BE = BA \cdot BC.$$

Tudjuk, hogy $BD > BE$, mert a pontok sorrendje $(B - E - D)$, ezért ezt behelyettesítve adódik, hogy

$$BD^2 > BA \cdot BC.$$



4. A röplabda-bajnokságon összesen tíz csapat versenyzett, minden csapat minden másik csapattal játszott egy mérkőzést. A verseny végén az első csapatnak x_1 győzelme és y_1 veresége volt, második csapatnak x_2 győzelme és y_2 veresége volt, harmadik csapatnak x_3 győzelme és y_3 veresége volt, stb. Igazold, hogy ekkor teljesül az $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{10}^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{10}^2$ egyenlőség!

Megoldás: Tegyük fel, hogy a versenyen minden mérkőzésben a győzelem egy pontot jelent, a vereség nulla pontot, akkor minden csapat legfeljebb kilenc pontot érhet el, $y_i = 9 - x_i$, $i = 1, 2, \ldots, 10$. Az összesen lejátszott mérkőzések száma

$$\frac{10 \cdot 9}{2} = 45,$$

tehát az összes pont összege 45, $x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} = 45$. Ekkor:

$$\begin{aligned} y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{10}^2 &= (9 - x_1)^2 + (9 - x_2)^2 + \ldots + (9 - x_{10})^2 \\ &= 10 \cdot 81 - 18 \cdot (x_1 + x_2 + \ldots + x_{10}) + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{10}^2 = \\ &= 810 - 18 \cdot 45 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{10}^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{10}^2 . \end{aligned}$$