XV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2017. december 2.

11. évfolyam

1. Igazold, hogy $5^n \; 5^n+1 \; -6^n \; 3^n+2^n$ **osztható tizenhárommal minden** n **természetes számra!**

2. Oldd meg a valós számok halmazán a $\sin^8 x+\cos^8 x=\frac{17}{32}$ **egyenletet!**

3. a) Adott egy 8×8**-as táblázat. Nevezzük főátlónak a bal alsó sarkot és a jobb felső sarkot összekötő szakaszt. A főátló alatti mezőket** 0**-kal töltjük ki, míg a többi mezőbe pozitív egész számokat írunk. A kitöltés után kiszámoljuk a sor- és az oszlopösszegeket. Lehetséges-e, hogy a sor- és az oszlopösszegekre az** $1,2,3,\ldots,16$ **számokat kapjuk eredményül (valamilyen sorrendben)?**

b) Ha egy 7×7**-es táblázatunk van, akkor lehetséges-e olyan, a fenti módon megadott kitöltés, hogy a sor- és az oszlopösszegekre az** $1,2,3,\ldots,14$ **számokat kapjuk eredményül (valamilyen sorrendben)?**

4. Az ABC **háromszög** A **csúcsból induló szögfelezője a háromszög köré írható körét** A_1 **pontban metszi. Bizonyítsd be, hogy ha a háromszög** BC **oldala az** AA_1 **szakaszt felezi a** D **pontban, akkor**

a) $AC\cdot AD=DC\cdot A_1C$ **és**

b) $AB+AC=BC\cdot\sqrt{2}$ **.**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

MEGOLDÁSOK – 11. évfolyam

1. Igazold, hogy $5^n\left(5^n+1\right)-6^n\left(3^n+2^n\right)$ osztható tizenhárommal minden n természetes számra!

Megoldás: A kifejezést két részre bontva $A=25^n-12^n$ és $B=5^n-18^n$, amelyekre igazoljuk, hogy oszthatóak 13-mal, ebben az esetben az összegük is osztható 13-mal.

$A=25^n-12^n$

$n=1$: $25-12=13$

$n=k$: $25^k-12^k=13\cdot l,\ l\in\mathbf{N}$

$n=k+1$: $25^{k+1}-12^{k+1}=25\cdot 25^k-12\cdot 12^k=$

$=12\cdot\left(25^k-12^k\right)+13\cdot 25^k=12\cdot 13l+13\cdot 25^k=13\cdot\left(12l+25^k\right)$

$B=5^n-18^n$

$n=1$: $5-18=-13$

$n=k$: $5^k-18^k=13\cdot t,\ t\in\mathbf{N}$

$n=k+1$: $5^{k+1}-18^{k+1}=5\cdot 5^k-18\cdot 18^k=$

$=5\cdot\left(5^k-18^k\right)-13\cdot 18^k=5\cdot 13t-13\cdot 18^k=13\cdot\left(5t-18^k\right)$

2. Oldd meg a valós számok halmazán a $\sin^8 x+\cos^8 x=\frac{17}{32}$ egyenletet!

Megoldás: Ha mindkét oldalhoz hozzáadjuk a $2\sin^4 x\cdot\cos^4 x$ kifejezést, akkor a bal oldal binom négyzetére alakítható:

$$\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)^2=\frac{17}{32}+2\sin^4 x\cdot\cos^4 x.$$

A baloldali kifejezés a zárójelen belül is binom négyzetére alakítható:

$$\left(\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x\right)^2=\frac{17}{32}+\frac{1}{8}\cdot 16\sin^4 x\cdot\cos^4 x$$

$$\left(1-\frac{1}{2}4\sin^2 x\cdot\cos^2 x\right)^2=\frac{17}{32}+\frac{1}{8}\cdot 16\sin^4 x\cdot\cos^4 x,$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)^2=\frac{17}{32}+\frac{1}{8}\cdot\sin^4 2x.$$

Vezessük be a következő helyettesítést: $t=\frac{\sin^2 2x}{2}$, $t\in\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$. Ekkor adódik, hogy $\left(1-t\right)^2=\frac{17}{32}+\frac{1}{2}\cdot t^2$, azaz $t^2-4t+\frac{15}{16}=0$, amely egyenletnek megoldásai $t_1=\frac{15}{4}$ és $t_2=\frac{1}{4}$, de a feltétel miatt csak a második megoldás fogadható el, azaz: $\frac{\sin^2 2x}{2}=\frac{1}{4}$.

Megoldva ezt az egyenletet, a $\sin 2x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ trigonometrikus egyenletet kapjuk, amelynek megoldásai $2x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, azaz $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}$, $k\in\mathbf{Z}$.

3. a) Adott egy 8×8-as táblázat. Nevezzük főátlónak a bal alsó sarkot és a jobb felső sarkot összekötő szakaszt. A főátló alatti mezőket 0-kal töltjük ki, míg a többi mezőbe pozitív egész számokat írunk. A kitöltés után kiszámoljuk a sor- és az oszlopösszegeket. Lehetséges-e, hogy a sor- és az oszlopösszegekre az $1,2,3,\ldots,16$ számokat kapjuk eredményül (valamilyen sorrendben)?

b) Ha egy 7×7-es táblázatunk van, akkor lehetséges-e olyan, a fenti módon megadott kitöltés, hogy a sor- és az oszlopösszegekre az $1,2,3,\ldots,14$ számokat kapjuk eredményül (valamilyen sorrendben)?

Megoldás: a) Elérhető a kívánt kitöltés. Egyik ilyen kitöltés látható az ábrán. Bármilyen helyes kitöltés elfogadható.

2	2	2	2	2	2	2	1	**15**
2	2	2	2	2	2	2	0	**14**
2	2	2	2	2	1	0	0	**11**
2	2	2	2	2	0	0	0	**10**
2	2	2	1	0	0	0	0	**7**
2	2	2	0	0	0	0	0	**6**
2	1	0	0	0	0	0	0	**3**
2	0	0	0	0	0	0	0	**2**
16	**13**	**12**	**9**	**8**	**5**	**4**	**1**	

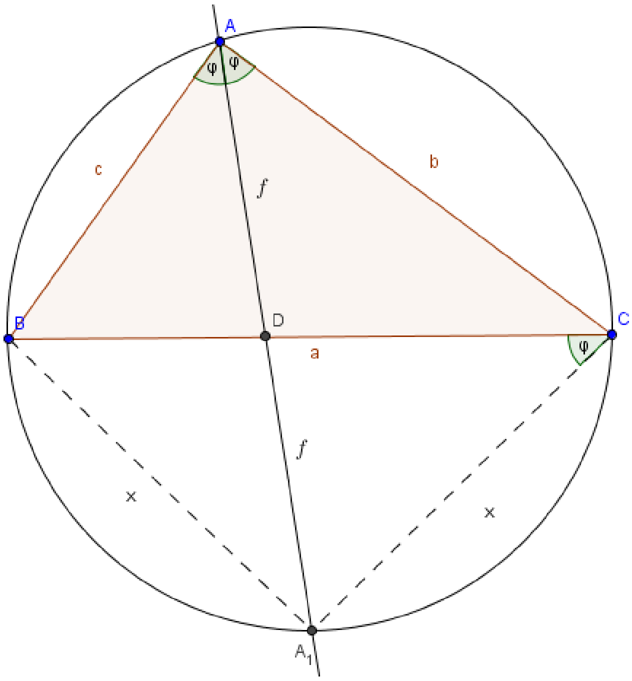
b) A kívánt kitöltés nem valósítható meg. Indirekt módszerrel bizonyítjuk, azaz tegyük fel, hogy megvalósítható a kívánt kitöltés a 7×7-es táblán is.
Adjuk össze a 7 sorösszeget, illetve a 7 oszlopösszeget. Legyen ez az összeg S. Az S-t úgy is megkaphattuk volna, hogy a táblázat számait kétszer összeadjuk, tehát az S páros szám. A feltételünk alapján az oszlopösszeg és a sorösszeg valamilyen sorrendben az $1,2,3,\ldots,14$ számok. Azaz $S=1+2+3+\cdots+14=105$. Ez ellentmond S párosságával, így ellentmondásra jutottunk.
Válasz: A kívánt kitöltés nem valósítható meg.

4. Az ABC háromszög A csúcsból induló szögfelezője a háromszög köré írható körét A_1 pontban metszi. Bizonyítsd be, hogy ha a háromszög BC oldala az AA_1 szakaszt felezi a D pontban, akkor

a) $AC\cdot AD = DC\cdot A_1C$ **és**

b) $AB + AC = BC\cdot\sqrt{2}$**.**

Megoldás: Használjuk az alábbi ábra jelöléseit!



a) Mivel a BA_1 húr feletti kerületi szögek egybevágóak, $BAA_1\angle = BCA_1\angle$, ezért $BA_1 = CA_1 = x$, valamint a D felezi az AA_1 szakaszt, $AD = DA_1 = f$, akkor az ADC és A_1DC háromszögek területe egyenlő. Felírhatjuk a háromszögek területképleteit:

$$T_{ADC\Delta} = \frac{b\cdot f\cdot\sin\varphi}{2} \text{ és } T_{A_1DC\Delta} = \frac{DC\cdot x\cdot\sin\varphi}{2},$$

ebből pedig $b\cdot f = DC\cdot x$, azaz $AC\cdot AD = DC\cdot A_1C$.

b) A szögfelező tétel alapján

$$AB : AC = BD : DC\text{, azaz } \frac{c}{b} = \frac{a-DC}{DC},$$

amelyből következik, hogy $DC = \dfrac{a\cdot b}{c+b}$. Ezt összekötve az előzővel adódik, hogy

$$b\cdot f = \frac{a\cdot b}{c+b}\cdot x\text{, innen pedig } x = \frac{b\cdot f\cdot (c+b)}{a\cdot b}.$$

A húrnégyszögre vonatkozó Ptolemaiosz-tétel alapján a szemközti oldalak szorzatának összege egyenlő az átlóinak szorzatával, ezért $2f\cdot a = x\cdot c + x\cdot b$, vagyis behelyettesítve az előzőeket:

$$2f\cdot a = x\cdot(c+b),\qquad 2f\cdot a = \frac{b\cdot f\cdot (c+b)}{a\cdot b}\cdot (b+c),$$

azaz egyszerűsítve és rendezve $2\cdot a^2 = (c+b)^2$, ami a bizonyítandó egyenlőség, vagyis $AB + AC = BC\cdot\sqrt{2}$.