XVI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2018. december 1.

10. évfolyam

1. Oldd meg az egész számok halmazán a következő egyenletet:

$$2x^3 + x + 5 - y^2 = 0.$$

2. Adott a valós függvényeknek egy sorozata a következő módon:

$$f_1(x) = \frac{x}{x-1},\ f_2(x) = \frac{1}{1-x},\ f_{n+2}(x) = f_{n+1}(f_n(x)),$$

ahol az n természetes szám. Mennyi az $f_{2018}(2019)$ értéke?

3. Az ABC szabályos háromszög BC oldalát a C-n túl meghosszabbítottuk a BC oldal felével, és így a D ponthoz jutottunk. A D-ből kiinduló félegyenes az AC oldalt annak felezőpontjában, F-ben metszi, az AB oldalnak pedig E-vel jelölt pontján halad át. Hányad része az AE szakasz hossza az ABC háromszög kerületének?

4. A táblára felírunk 2017 nullát, 2018 egyest és 2019 kettes számjegyet. Minden alkalommal két különböző számjegyet törlünk és helyettük a 0, 1, 2 számjegy közül azt az egy számjegyet írjuk, amely abban a lépésben nem került letörlésre.
a) Bizonyos lépés után maradhat-e csupa nulla sorozat?
b) Amikor a táblán csak egy számjegy maradt, akkor mely számjegyek lehetnek azok?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XVI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
MEGOLDÁSOK – 10. évfolyam

1. Oldd meg az egész számok halmazán a következő egyenletet:

$$2x^3+x+5-y^2=0.$$

Megoldás:
A $2x^3+x$ kifejezést $2x^3-2x+3x=2x(x-1)(x+1)+3x$ alakba írva belátható, hogy a $2x^3+x$ kifejezés mindig osztható 3-mal. Más módon, a $2x^3+x$ kifejezést $x(2x^2+1)$ alakban írva, az $x=3k$, $x=3k+1$, illetve $x=3k+2$ eseteket vizsgálva szintén megállapíthatjuk, hogy a $2x^3+x$ kifejezés mindig osztható 3-mal.
Ezért az

$$2x^3+x+5=y^2$$

egyenlőség bal oldalának 3-mal való osztási maradéka mindig 2, jobb oldalon pedig egy négyzetszám van, aminek 3-mal való osztási maradéka nem lehet 2.
Következik, hogy az egyenletnek nincs egész megoldása.

2. Adott a valós függvényeknek egy sorozata a következő módon:

$$f_1(x)=\frac{x}{x-1},\ f_2(x)=\frac{1}{1-x},\ f_{n+2}(x)=f_{n+1}(f_n(x)),$$

ahol az n természetes szám. Mennyi az $f_{2018}(2019)$ értéke?

Megoldás: Alkalmazva a rekurzív képletet adódik, hogy

$$f_1(x)=\frac{x}{x-1},\ f_2(x)=\frac{1}{1-x},\ f_3(x)=f_2(f_1(x))=1-x,$$

$$f_4(x)=f_3(f_2(x))=\frac{x}{x-1},\ f_5(x)=f_4(f_3(x))=\frac{x-1}{x},$$

$$f_6(x)=f_5(f_4(x))=\frac{1}{x},\ f_7(x)=f_1(x) \text{ és } f_8(x)=f_2(x),$$

tehát a függvénysorozat hatos periódussal ismétlődik, azaz

$$f_{6k+m}(x)=f_m(x).$$

Ennek alapján $f_{2018}(x)=f_2(x)$, amelyből az következik, hogy

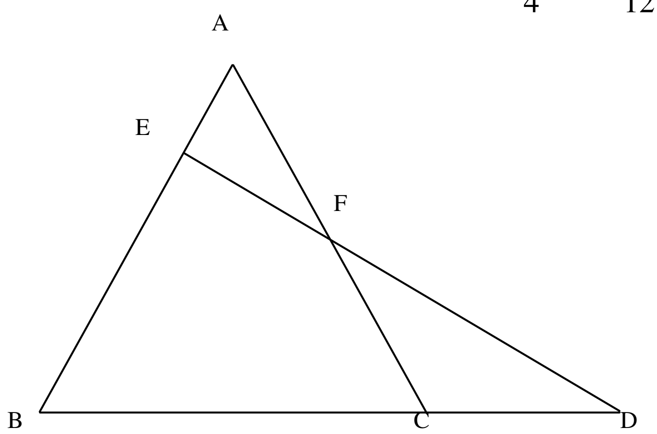
$$f_{2018}(2019)=-\frac{1}{2018}.$$

3. Az ABC szabályos háromszög BC oldalát a C-n túl meghosszabbítottuk a BC oldal felével, és így a D ponthoz jutottunk. A D-ből kiinduló félegyenes az AC oldalt annak felezőpontjában, F-ben metszi, az AB oldalnak pedig E-vel jelölt pontján halad át. Hányad része az AE szakasz hossza az ABC háromszög kerületének?

Megoldás: Legyen $AB = BC = CA = a$ és $CD = CF = FA = \frac{a}{2}$. Mivel az ABC háromszög szabályos, ezért belső szögei $60°$-osak. $CD = CF$, ezért a CDF háromszög egyenlő szárú, és mivel a C-nél lévő külső szöge $120°$-os, ezért $DFC\angle = CDF\angle = 30°$. Az $EFA\angle = DFC\angle = 30°$ teljesül, mert csúcsszögek és $FAE\angle = 60°$, így

$$AEF\angle = 180° - EFA\angle - FAE\angle = 180° - 30° - 60° = 90°.$$

Tehát az EFA háromszög szögei $30°$, $60°$ és $90°$, azaz az EFA háromszög egy „félszabályos háromszög". A rövidebbik befogójának hossza fele az átfogója hosszánál, azaz $AE = \frac{FA}{2} = \frac{a}{4}$. Az ABC háromszög kerülete $3a$, így AE hossza a kerület $\frac{a}{4} : 3a = \frac{1}{12}$-ed része.



4. A táblára felírunk 2017 nullát, 2018 egyest és 2019 kettes számjegyet. Minden alkalommal két különböző számjegyet törlünk és helyettük a 0, 1, 2 számjegy közül azt az egy számjegyet írjuk, amely abban a lépésben nem került letörlésre.
a) Bizonyos lépés után maradhat-e csupa nulla sorozat?
b) Amikor a táblán csak egy számjegy maradt, akkor mely számjegyek lehetnek azok?

Megoldás: a) Legyen $a_0 = 2017$, $b_0 = 2018$, $c_0 = 2019$. Az a_n, b_n, c_n jelölik rendre az n-edik lépés utáni a 0-ás, az 1-es, illetve a 2-es számjegyek számát és ezek minden lépésben változnak. A kezdő adatok alapján a 0-ák és a 2-esek száma azonos paritásúak és az egyesek számának paritása pedig nem egyezik meg ezzel.
Feltételezzük, hogy n lépés után csak nullák maradtak a táblán, azaz $b_n = 0 = c_n$, de ez az előbbi paritási vizsgálattal ellentmondó.
b) Ha az n lépés után egy számjegy maradt a táblán, akkor az a_n, b_n, c_n közül kettő nulla, ezek tehát azonos paritásúak, így a $b_n = 1$, tehát az 1 számjegy maradt a táblán**.**