XVI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2018. december 1.

12. évfolyam

1. Bizonyítsd be, hogy ha az $f(x)$ olyan egész együtthatós polinom, hogy öt különböző egész helyen 1-et vesz fel értékül, akkor nincs olyan a egész szám, amelyre $f(a)=-1$ lenne!

2. Adottak az A, B, C, D nem egy síkban fekvő pontok, amelyekre érvényes, hogy $AB=BC=CD=DA$. Az M, illetve az N pont az AC, illetve a BD szakasz felezőpontja. Igazold, hogy MN az AC és BD szakaszok közös merőlegese!

3. Oldd meg a következő egyenletet a természetes számok halmazában:

$$x!+123=y^5$$

4. Kezdetben egy 3×3-as táblázat minden mezőjén 0 áll, majd egy-egy lépésben a tábla valamely 2×2-es részén a számok mindegyikét 1-gyel növeljük. Megkaphatjuk-e ilyen lépésekkel a következő kitöltést?

4	9	5
10	18	12
6	13	7

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XVI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
MEGOLDÁSOK – 12. évfolyam

1. Bizonyítsd be, hogy ha az $f(x)$ olyan egész együtthatós polinom, hogy öt különböző egész helyen 1-et vesz fel értékül, akkor nincs olyan a egész szám, amelyre $f(a)=-1$ lenne!

Megoldás: Legyenek a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 azok a különböző egész számok, amelyekre $f(a_1)=f(a_2)=f(a_3)=f(a_4)=f(a_5)=1$. Tegyük fel, hogy van olyan a egész szám, amelyre $f(a)=-1$. Ismeretes, hogy ha $f(x)$ egész együtthatós polinom, c és d pedig különböző egész számok, akkor $(c-d)\,|\,(f(c)-f(d))$. Ekkor viszont a_1-a, a_2-a, a_3-a, a_4-a, a_5-a különböző egész számok, amelyek a 2 egész szám osztói. Ez ellentmondás, mert a 2-nek csak négy különböző egész osztója van: 1, -1,2, -2, tehát a feltételezés nem igaz.

2. Adottak az A,B,C,D nem egy síkban fekvő pontok, amelyekre érvényes, hogy $AB=BC=CD=DA$. Az M, illetve az N pont az AC, illetve a BD szakasz felezőpontja. Igazold, hogy MN az AC és BD szakaszok közös merőlegese!

Megoldás: Mivel az $ABD\Delta$ és $BCD\Delta$ egymással egybevágó, ezért $AN=CN$, hiszen egymással egybevágó, egyenlő szárú háromszögek súlyvonalairól van szó. Így viszont az $ACN\Delta$ is egyenlő szárú és MN az alaphoz (AC-hez) tartozó súlyvonal, amiből következik, hogy $MN \perp AC$. A másik merőlegesség hasonló módon igazolható.

3. Oldd meg a következő egyenletet a természetes számok halmazában:

$$x!+123=y^5.$$

Megoldás: Az $x \le 5$ természetes számokra kipróbáljuk, és látjuk, hogy egyedül $x=5$ esetén kapunk teljes ötödik hatványt eredményül: $5!+123=243=3^5$. Tehát egy megoldás biztosan létezik, mégpedig az $(x,y)=(5,3)$. Bebizonyítjuk, hogy több megoldás nem létezik. Legyen $x \ge 6$. Ekkor biztosan teljesül, hogy $9\,|\,x!$, amiből következik, hogy $x!+123 \equiv_9 0+6=6$. Vagyis y^5-nek is a 9-cel való osztási maradéka 6 kell, hogy legyen, vagyis y^5-nek oszthatónak kellene, hogy legyen 3-mal, de 9-cel nem, ami nyilvánvalóan nem lehetséges.

4. Kezdetben egy 3×3-as táblázat minden mezőjén 0 áll, majd egy-egy lépésben a tábla valamely 2×2-es részén a számok mindegyikét 1-gyel növeljük. Megkaphatjuk-e ilyen lépésekkel a következő kitöltést?

4	9	5
10	18	12
6	13	7

I. megoldás: Nem. Vegyük észre, hogy ha a megadott szabály szerint módosítjuk a táblázatot, minden lépésben a középső szám értéke egyenlő lesz a négy sarokban levő szám összegével. Ez a megadott táblázatra nem teljesül, tehát a megadott kitöltés nem érhető el.

II. megoldás: Vegyük észre, hogy a középső szám lényegében az elvégzett lépések számát adja meg. Vagyis a fenti esetben 18 lépést végeztünk el, ami egyben azt jelenti, hogy 18-szor emeltük a táblázatban szereplő számok összegét 4-gyel. Így, ha szabályosan jártunk volna el, a táblázatban szereplő számok összege 72 kellene, hogy legyen, ami nem teljesül a fenti táblázatra.