XV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2018. december 1.

9. évfolyam

1. Mely valós számok elégítik ki a következő egyenletrendszert:

$$-2018|x| + y + z = 2017,$$
$$x + y + z = 2018,$$
$$x + y + 2z = 2019.$$

2. Melyik az a legkisebb természetes szám, amelyre érvényes, hogy ha 7**-tel,** 8**-cal,** 9**-cel vagy** 10**-zel maradékosan elosztjuk, akkor a maradék rendre** 2, 0, 1, 8**?**

3. Az $ABCD$ **téglalap** AB **oldalának hossza** $40\,cm$**,** BC **oldalának hossza** $30\,cm$**. A téglalap** AD **és** CD **oldalára mint átmérőre félköröket rajzolunk a téglalap belseje felé. A két félkör a téglalap** P **pontjában metszi egymást. Mekkora az** ABP **háromszög területe?**

4. a) Egy bolha ugrál a számegyenesen. Az origóból indul és mindig egy egységnyit ugrik pozitív vagy negatív irányba. Hol lehet ez a bolha a 100. **ugrás után? Hány ilyen pont van?**
b) Egy másik bolha ugrál a derékszögű koordináta-rendszerben. Az origóból indul és mindig egy egységnyit ugrik valamelyik tengellyel párhuzamosan. Hol lehet ez a bolha a 100. **ugrás után? Hány ilyen pont van?**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XVI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
MEGOLDÁSOK – 9. évfolyam

1. Mely valós számok elégítik ki a következő egyenletrendszert:

$$-2018|x| + y + z = 2017,$$
$$x + y + z = 2018,$$
$$x + y + 2z = 2019.$$

Megoldás: A harmadik egyenletből kivonva a másodikat $z = 1$-et kapunk. Ekkor az egyenletrendszer így módosul:

$$-2018|x| + y = 2016,$$
$$x + y = 2017.$$

Most az első egyenletből kivonva a második egyenletet adódik, hogy $-2018|x| = x - 1$.

Ha $x < 0$, akkor $2017x = -1$, és $x = -\frac{1}{2017}$, a második egyenletből pedig

$$y = 2017\frac{1}{2017}.$$

Ha $x \geq 0$, akkor $2019x = 1$, és $x = \frac{1}{2019}$, a második egyenletből pedig

$$y = 2016\frac{2018}{2019}.$$

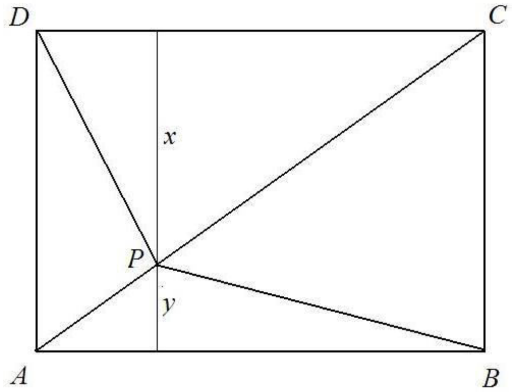
A két megoldás tehát: $\left(-\frac{1}{2017}; 2017\frac{1}{2017}; 1\right)$ és $\left(\frac{1}{2019}; 2016\frac{2018}{2019}; 1\right)$.

2. Melyik az a legkisebb természetes szám, amelyre érvényes, hogy ha 7-tel, 8-cal, 9-cel vagy 10-zel maradékosan elosztjuk, akkor a maradék rendre 2, 0, 1, 8?

Megoldás: Először tekintsük az első két feltételt, azaz keressünk olyan természetes számokat, amelyek 7-tel osztva 2-t, 8-cal osztva 0-t adnak maradékul. Ezek a számok biztosan $7k + 2$ alakúak, ahol k nemnegatív egész szám. A 8-cal való oszthatóság miatt k lehetséges értékei: 2, 10, 18,…, azaz $7k + 2$ lehetséges értékei 16, 72, 128,…. Pontosan ezek azok a számok, amelyek teljesítik az első két feltételt. Általános alakjuk: $56l + 16$, ahol l nemnegatív egész szám.
Ha egy $56l + 16$ alakú szám 9-cel osztva 1-et ad maradékul, akkor az $56l + 15$ osztható 9-cel. A könnyebb számolás érdekében számoljunk csak a 9-es maradékokkal, azaz vizsgáljuk a $2l + 6$ kifejezés 9-cel való oszthatóságát. Könnyen látható, hogy l lehetséges értékei 6, 15, 24, 33, 42,…, azaz az eredeti kifejezésbe behelyettesítve $56l + 16$-ra 352, 856, 1360, 1864, 2368,…adódik.
A 2368 kielégíti a feltételeket, és mivel a feladat minden lépésében a lehető legkisebb számot választottuk, a 2368-nál nincs kisebb megfelelő szám.

3. Az $ABCD$ téglalap AB oldalának hossza $40\ cm$, BC oldalának hossza $30\ cm$. A téglalap AD és CD oldalára mint átmérőre félköröket rajzolunk a téglalap belseje felé. A két félkör a téglalap P pontjában metszi egymást. Mekkora az ABP háromszög területe?

Megoldás: Mivel a P pont rajta van az AD és az AB oldalakra mint átmérőkre rajzolt köríveken, ezért az APD szög és az CPD szög egyaránt derékszög (lásd az ábrát).



Először kiszámítjuk a DP szakasz hosszát, amely az ACD derékszögű háromszög magassága. Ismerve a téglalap átlójának hosszát, amely Pitagorasz-tétele alapján $50\ cm$, a területet kétféleképpen kapjuk:

$$\frac{AD \cdot DC}{2} = \frac{AC \cdot DP}{2}, \text{ ahonnan } DP = (30 \cdot 40) : 50 = 24\ cm.$$

Következő lépésként kiszámoljuk az AP szakasz hosszát. Mivel $DP^2 = AD^2 - AP^2$ és $DP^2 = DC^2 - PC^2$, a jobb oldalakba beírva az ismert hosszakat és egymással kiegyenlítve őket a következő egyenletet kapjuk:

$$30^2 - AP^2 = 40^2 - (50 - AP)^2,$$

$$900 - AP^2 = 1600 - 2500 + 100AP - AP^2,$$

ahonnan $AP = 18\ cm$ és $PC = 32\ cm$. DP is kiszámítható:

$$DP = \sqrt{AD^2 - AP^2} = \sqrt{30^2 - 18^2} = 24.$$

Most a DPC háromszög területét kétféleképpen felírva ki tudjuk számolni az x-szel jelölt szakasz hosszát:

$$\frac{DP \cdot PC}{2} = \frac{x \cdot CD}{2}, \text{ ahonnan } x = \frac{24 \cdot 32}{40} = \frac{96}{5} = 19{,}2\ cm.$$

Mivel $y = 30 - 19{,}2 = 10{,}8\ cm$, így $T_{ABP} = \frac{AB \cdot y}{2} = \frac{40 \cdot 10{,}8}{2} = 216\ cm^2$, s ez a keresett terület.

4. a) Egy bolha ugrál a számegyenesen. Az origóból indul és mindig egy egységnyit ugrik pozitív vagy negatív irányba. Hol lehet ez a bolha a 100. **ugrás után? Hány ilyen pont van?**
b) Egy másik bolha ugrál a derékszögű koordináta-rendszerben. Az origóból indul és mindig egy egységnyit ugrik valamelyik tengellyel párhuzamosan. Hol lehet ez a bolha a 100. **ugrás után? Hány ilyen pont van?**

Megoldás: a) Tegyük föl, hogy a bolhának x ugrása volt pozitív irányba, ekkor a 100. ugrás után az $x-(100-x)=2x-100$-adik pontban van. Mivel x lehetséges értékei 0, 1, …, 100, így az előző kifejezés a $-100,-98,-96,\ldots,98,100$ értékeket adja, vagyis pontosan ezekben a pontokban tartózkodhat a bolha a 100. ugrás után. A másik kérdésre válaszolva: 101 ilyen pont van.

b) Ha a bolha a 100. lépés után – nevezzük ezt a továbbiakban végállapotnak – az $(x;y)$ koordinátájú pontban áll meg, akkor $|x|+|y|=100$. Ezek szerint a bolha végállapota egy olyan $ABCD$ négyzetben (beleértve annak határát is) van, amelynek csúcsai: $(100;0),(0;100),(-100;0),(0;-100)$.
1. eset: Megmutatjuk, hogy a négyzet minden olyan rácspontja szóba jöhet, amelyre $x+y$ páros. Ugyanis ekkor a $100-x-y$ is páros, ugorjon ennyit a bolha oda-vissza a $(0;0)$ és a $(0;1)$ pontok között, majd a megmaradt ugrásokból ugorjon x-et az x tengellyel párhuzamosan a megfelelő irányba, és y-t az y tengellyel párhuzamosan ugyanígy. Ekkor a bolha éppen az $(x;y)$ pontba jut.
2. eset: Megmutatjuk, hogy az $ABCD$ négyzet olyan pontjai, amelyek esetén $x+y$ páratlan, nem jöhetnek szóba. A bolha egy ugrása során a helyzetét leíró koordináták összege paritást vált. Az első ugrás után ez páratlan, majd páros, majd páratlan, és így tovább. Világos, hogy a 100. ugrás után az $x+y$ összeg csak páros lehet.
Hátra van még a végállapotok összeszámlálása. A $(100;k)$ koordinátájú pontok közül a bolha csak a $(100;0)$ pontba tud eljutni a korábbiak szerint. Ezt így írjuk, majd a gondolatmenetet folytatjuk:

$(100;k)$	$k=0$	Összesen 1 darab
$(99;k)$	$k=-1,1$	Összesen 2 darab
$(98;k)$	$k=-2,0,2$	Összesen 3 darab
…		
$(1;k)$	$k=-99,-97,\ldots,97,99$	Összesen 100 darab
$(0;k)$	$k=-100,-98,\ldots,98,100$	Összesen 101 darab

A szimmetria miatt az összes esetek száma tehát:
$$101+2\cdot(100+99+98+\cdots+2+1)=101+2\cdot\frac{101\cdot100}{2}=101^2=10201.$$