

XV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2017. december 2.

12. évfolyam

1. a) Adott egy 8×8 -as táblázat. Nevezzük főátlónak a bal alsó sarkot és a jobb felső sarkot összekötő szakaszt. A főátló alatti mezőket 0-kal töltjük ki, míg a többi mezőbe pozitív egész számokat írunk. A kitöltés után kiszámoljuk a sor- és az oszlopösszegeket. Lehetséges-e, hogy a sor- és az oszlopösszegekre az $1, 2, 3, \dots, 16$ számokat kapjuk eredményül (valamilyen sorrendben)?

b) Ha egy 7×7 -es táblázatunk van, akkor lehetséges-e olyan, a fenti módon megadott kitöltés, hogy a sor- és az oszlopösszegekre az $1, 2, 3, \dots, 14$ számokat kapjuk eredményül (valamilyen sorrendben)?

2. Határozd meg, hogy mennyi a 2017^{12^2} szám 15-tel való osztásakor keletkezett maradék!

3. Adott a p egyenes. Létezik-e olyan

a) 2017-szög,

b) 2018-szög,

amelyre érvényes hogy a p egyenes metszi az adott sokszög minden oldalát egy olyan pontban, amely nem csúcspont?

4. Oldd meg a valós számok halmazán a $\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{17}{32}$ egyenletet!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

MEGOLDÁSOK – 12. évfolyam

1. a) Adott egy 8×8 -as táblázat. Nevezzük főátlónak a bal alsó sarkot és a jobb felső sarkot összekötő szakaszt. A főátló alatti mezőket 0-kal töltjük ki, míg a többi mezőbe pozitív egész számokat írunk. A kitöltés után kiszámoljuk a sor- és az oszlopösszegeket. Lehetséges-e, hogy a sor- és az oszlopösszegekre az $1, 2, 3, \dots, 16$ számokat kapjuk eredményül (valamilyen sorrendben)?

b) Ha egy 7×7 -es táblázatunk van, akkor lehetséges-e olyan, a fenti módon megadott kitöltés, hogy a sor- és az oszlopösszegekre az $1, 2, 3, \dots, 14$ számokat kapjuk eredményül (valamilyen sorrendben)?

Megoldás: a) Elérhető a kívánt kitöltés. Egyik ilyen kitöltés látható az ábrán. Bármilyen helyes kitöltés elfogadható.

2	2	2	2	2	2	2	1	15
2	2	2	2	2	2	2	0	14
2	2	2	2	2	1	0	0	11
2	2	2	2	2	0	0	0	10
2	2	2	1	0	0	0	0	7
2	2	2	0	0	0	0	0	6
2	1	0	0	0	0	0	0	3
2	0	0	0	0	0	0	0	2
16	13	12	9	8	5	4	1	

b) A kívánt kitöltés nem valósítható meg. Indirekt módszerrel bizonyítjuk, azaz tegyük fel, hogy megvalósítható a kívánt kitöltés a 7×7 -es táblán is.

Adjuk össze a 7 sorösszeget, illetve a 7 oszlopösszeget. Legyen ez az összeg S . Az S -t úgy is megkaphattuk volna, hogy a táblázat számait kétszer összeadjuk, tehát az S páros szám. A feltételünk alapján az oszlopösszeg és a sorösszeg valamilyen sorrendben az $1, 2, 3, \dots, 14$ számok. Azaz $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 14 = 105$. Ez ellentmond S párosságával, így ellentmondásra jutottunk.

Válasz: A kívánt kitöltés nem valósítható meg.

2. Határozd meg, hogy mennyi a 2017^{12^2} szám 15-tel való osztásakor keletkezett maradék!

Megoldás: Mivel $2017 \equiv_{15} 7$, valamint $7^4 = 2401 \equiv_{15} 1$, ezért érvényes hogy:

$$2017^{12^2} = 2017^{144} \equiv_{15} 7^{144} = 7^4 \cdot 38 \equiv_{15} 1^{38} = 1.$$

Válasz: Az adott szám 15-tel osztva 1-et ad maradékkul.

3. Adott a p egyenes. Létezik-e olyan

a) 2017-szög

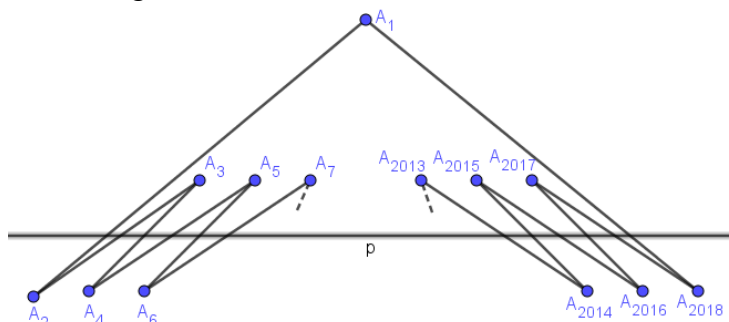
b) 2018-szög

amelyre érvényes hogy a p egyenes metszi az adott sokszög minden oldalát egy olyan pontban, amely nem csúcspont.

Megoldás:

a) Nem lehet, mert a 2017 páratlan szám. Ha egy egyenes metszi egy sokszög minden oldalát egy olyan pontban ami nem csúcspont, akkor az egyenes mindkét oldalán a sokszögnek ugyanannyi csúcsa kell, hogy legyen, vagyis egy ilyen sokszög csúcsainak száma csakis páros szám lehet.

b) Létezik ilyen sokszög. Például:



4. Oldd meg a valós számok halmazán a $\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{17}{32}$ egyenletet!

Megoldás: Ha mindkét oldalhoz hozzáadjuk a $2\sin^4 x \cdot \cos^4 x$ kifejezést, akkor a bal oldal binom négyzetére alakítható:

$$\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^4 x \cdot \cos^4 x = \frac{17}{32} + 2\sin^4 x \cdot \cos^4 x.$$

A baloldali kifejezés a zárójelen belül is binom négyzetére alakítható:

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x = \frac{17}{32} + \frac{1}{8} \cdot 16\sin^4 x \cdot \cos^4 x$$

$$\left(1 - \frac{1}{2} 4\sin^2 x \cdot \cos^2 x\right)^2 = \frac{17}{32} + \frac{1}{8} \cdot 16\sin^4 x \cdot \cos^4 x,$$

$$\left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x\right)^2 = \frac{17}{32} + \frac{1}{8} \cdot \sin^4 2x.$$

Vezessük be a következő helyettesítést: $t = \frac{\sin^2 2x}{2}$, $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Ekkor adódik, hogy

$$1 - t^2 = \frac{17}{32} + \frac{1}{2} \cdot t^2, \text{ azaz } t^2 - 4t + \frac{15}{16} = 0, \text{ amely egyenletnek megoldásai } t_1 = \frac{15}{4} \text{ és}$$

$$t_2 = \frac{1}{4}, \text{ de a feltétel miatt csak a második megoldás fogadható el, azaz: } \frac{\sin^2 2x}{2} = \frac{1}{4}.$$

Megoldva ezt az egyenletet, a $\sin 2x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ trigonometrikus egyenletet kapjuk,

amelynek megoldásai $2x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, azaz $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$.