XIV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2016. december 3.

11. évfolyam

1. Oldd meg az

$$x^{\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}} = y^2 \cdot \sqrt[3]{y^2}$$
$$y^{\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}} = \sqrt[3]{x^2}$$

egyenletrendszert a valós számok halmazán!

2. Számítsd ki a $\sin 6° \cdot \sin 42° \cdot \sin 66° \cdot \sin 78°$ **szorzat értékét!**

3. Határozd meg mindazokat az $(a;b)$ **valós számpárokat, amelyekre teljesül az** $(a+ib)^{2016} = a - ib$ **egyenlőség!**

4. Az ABC **háromszögbe írt kör középpontján keresztül a** $BC = a$, $CA = b$ **és** $AB = c$ **oldalakkal párhuzamos egyeneseket húzunk, amelyeken a háromszög sorra** m, n, p **szakaszokat metsz ki. Bizonyítsd be, hogy teljesül az**

$$\frac{m}{a} + \frac{n}{b} + \frac{p}{c} = 2$$ **egyenlőség!**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XIV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
MEGOLDÁSOK – 11. évfolyam

1. **Oldd meg az**

$$x^{\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}} = y^2 \cdot \sqrt[3]{y^2}$$
$$y^{\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}} = \sqrt[3]{x^2}$$

egyenletrendszert a valós számok halmazán!

Megoldás: A megoldás feltétele $x>0$ és $y>0$. Vegyük észre, hogy az $x=1$ és $y=1$, azaz az $(1;1)$ rendezett pár megoldása az egyenletrendszernek.

Most tegyük fel, hogy $x\neq 1$, $y\neq 1$. Ekkor tízes alapú logaritmussal átalakítjuk az egyenleteket a következő módon:

$$\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}\right)\cdot \log x = \frac{8}{3}\log y,$$
$$\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}\right)\cdot \log y = \frac{2}{3}\log x,$$

valamint

$$\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}\right) = \frac{8\log y}{3\log x},$$
$$\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}\right) = \frac{2\log x}{3\log y}.$$

ahonnan kapjuk, hogy $\frac{8\log y}{3\log x} = \frac{2\log x}{3\log y}$, azaz $4\log^2 y = \log^2 x$.

Most két esetet figyelhetünk. Ha $2\log y = \log x$, tehát $x = y^2$, visszahelyettesítve azt kapjuk, hogy $2\sqrt{y} = \frac{4}{3}$, a megoldása pedig $(x,\ y) = \left(\frac{16}{81};\frac{4}{9}\right)$.

Ha viszont $2\log y = -\log x$, akkor $\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}\right) < 0$, ami lehetetlen.

A megoldáshalmaz tehát: $M = \left\{(1;1),\left(\frac{16}{81};\frac{4}{9}\right)\right\}$.

2. Számítsd ki a $\sin 6°\cdot\sin 42°\cdot\sin 66°\cdot\sin 78°$ **szorzat értékét!**

Megoldás: A szorzatot megszorozzuk és elosztjuk $2\cos 6°$ kifejezéssel, majd a kétszeres szögek képletével egyszerűbb alakra hozzuk:

$$\sin 6°\cdot\sin 42°\cdot\sin 66°\cdot\sin 78° = \frac{2\sin 6°\cdot\cos 6°\cdot\sin 42°\cdot\sin 66°\cdot\sin 78°}{2\cos 6°} =$$
$$= \frac{2\sin 12°\cdot\sin 42°\cdot\sin 66°\cdot\cos 12°}{2\cdot 2\cos 6°} = \frac{2\sin 24°\cdot\sin 42°\cdot\cos 24°}{2\cdot 2\cdot 2\cos 6°} =$$
$$= \frac{2\sin 48°\cdot\cos 48°}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cos 6°} = \frac{\sin 96°}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cos 6°} = \frac{\sin 84°}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cos 6°} = \frac{\cos 6°}{16\cdot\cos 6°} = \frac{1}{16}.$$

Az átalakítás során felhasználtuk a $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$ és a $\sin\alpha = \cos(90°-\alpha)$ trigonometriai azonosságokat.

3. Határozd meg mindazokat az $(a;b)$ valós számpárokat, amelyekre teljesül az $(a+ib)^{2016}=a-ib$ egyenlőség!

Megoldás: Legyen $z=a+ib$, akkor a feladat $z^{2016}=\overline{z}$, vagyis $|z|^{2016}=|z|$

I. eset: ha $|z|=0$, akkor $z=0+0i$.

II. eset: ha $|z|^{2015}=1$, akkor $|z|=1$, illetve $z^{2016}=\overline{z}$. Az utolsó egyenlőség mindkét oldalát beszorozva z -vel, adódik, hogy

$$z^{2017}=\overline{z}\cdot z=|z|^2=1,$$

azaz

$$z_k=\cos\frac{2k\pi}{2017}+i\cdot\sin\frac{2k\pi}{2017},\ k=0,1,2,...,2016.$$

4. Az ABC háromszögbe írt kör középpontján keresztül a $BC=a$, $CA=b$ és $AB=c$ oldalakkal párhuzamos egyeneseket húzunk, amelyeken a háromszög sorra m, n, p szakaszokat metsz ki. Bizonyítsd be, hogy teljesül az

$$\frac{m}{a}+\frac{n}{b}+\frac{p}{c}=2 \text{ **egyenlőség!**}$$

Megoldás: Jelöljük az ABC háromszög területét T-vel, ekkor

$$T=\frac{a\cdot h_a}{2}=\frac{b\cdot h_b}{2}=\frac{c\cdot h_c}{2}.$$

Legyen r a beírt kör sugara. Mivel $ABC\Delta \sim BEF\Delta$, mert párhuzamosak az oldalaik, ezért alapjaik és magasságaik arányosak, azaz $\frac{n}{b}=\frac{h_b-r}{h_b}$. A párhuzamos oldalak miatt hasonlóan kapjuk, hogy $ABC\Delta \sim AHG\Delta$, ahonnan $\frac{m}{a}=\frac{h_a-r}{h_a}$, valamint hogy $ABC\Delta \sim CIJ\Delta$, ahonnan $\frac{p}{c}=\frac{h_c-r}{h_c}$.

Ebből adódik, hogy

$$\frac{m}{a}+\frac{n}{b}+\frac{p}{c}=$$

$$=\frac{h_a-r}{h_a}+\frac{h_b-r}{h_b}+\frac{h_c-r}{h_c}=$$

$$=3-r\cdot\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)$$

$$=3-r\cdot\left(\frac{a+b+c}{2T}\right)=$$

$$=3-r\cdot\frac{2s}{2sr}=3-1=2.$$