

XI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

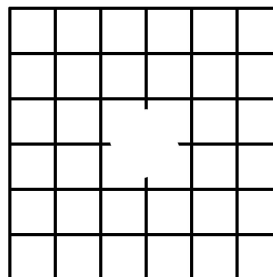
Zenta, 2013. november 30.

9. évfolyam

1. A Csupa-Csoki belga édességboltba 10 különleges csokidesszerttel megrakott doboz érkezett. Minden dobozba ugyanannyi darab csokidesszertet csomagoltak, de mindegyikbe különböző fajtát. Az eladó az első dobozból eladott valamennyi csokidesszertet, a másodikból kétszer annyit, mint az elsőből, a harmadik dobozból háromszor annyit, mint az elsőből, és így tovább, a tizedik dobozból tízszer annyit, mint az elsőből. Ekkor a tizedik dobozban csak egy csokidesszert maradt, a dobozokban pedig összesen 370 darab. Hány csokidesszert volt a dobozokban a vásárlás előtt?

2. Mici Mackó felírt a táblára három különböző számjegyet. Azt a feladatot adta Malackának, hogy az első két számot szorozza össze, a szorzatot pedig ossza el a harmadikkal. Malacka nagy buzgalmában felcserélte a műveleteket, ezért a helyes 16 eredmény helyett a második számot kapta. Mely számokat írta fel Mici Mackó a táblára?

3. Az ábrán látható négyzetrács közepe kilyukadt. Hányféleképpen tudnál elhelyezni 6 bábút az épen maradt négyzetekre úgy, hogy minden sorban, minden oszlopban és mindkét átlóban pontosan egy legyen?



4. Az ABC derékszögű háromszögben az átfogó hossza 20 cm. A háromszög beírt körének r és köréírt körének R sugara úgy aránylanak egymáshoz, mint $2:5$. Számold ki a háromszög kerületét és területét!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

MEGOLDÁSOK – 9. évfolyam

1. A Csupa-Csoki belga édességboltba 10 különleges csokidesszerttel megrakott doboz érkezett. Minden dobozba ugyanannyi darab csokidesszertet csomagoltak, de mindegyikbe különböző fajtát. Az eladó az első dobozból eladott valamennyi csokidesszertet, a másodikból kétszer annyit, mint az elsőből, a harmadik dobozból háromszor annyit, mint az elsőből, és így tovább, a tizedik dobozból tízszer annyit, mint az elsőből. Ekkor a tizedik dobozban csak egy csokidesszert maradt, a dobozokban pedig összesen 370 darab. Hány csokidesszert volt a dobozokban a vásárlás előtt?

Megoldás: A dobozokból rendre x , $2x$, $3x$, ..., $9x$ és $10x$ csokidesszertet adtak el. A tizedik dobozból $10x$ csokidesszertet adtak el és egy maradt benne, azaz ebben a dobozban $10x+1$ csokidesszert volt összesen. Mivel minden dobozban ugyanannyi desszert volt, így összesen $10(10x+1)$ darab desszert érkezett a boltba, amelyből eladtak $55x$ darabot, s így maradt még 370 darab. Ekkor

$$10(10x+1) = 55x + 370,$$

amelyből adódik, hogy

$$100x - 55x = 370 - 10, \text{ azaz } 45x = 360,$$

vagyis $x = 8$. Ebből megtudtuk, hogy egy-egy dobozba $10x+1 = 10 \cdot 8 + 1 = 81$ csokidesszertet csomagoltak, tehát minden dobozban ennyi volt a vásárlás előtt.

2. Mici Mackó felírt a táblára három különböző számjegyet. Azt a feladatot adta Malackának, hogy az első két számot szorozza össze, a szorzatot pedig ossza el a harmadikkal. Malacka nagy buzgalmában felcserélte a műveleteket, ezért a helyes 16 eredmény helyett a második számot kapta. Mely számokat írta fel Mici Mackó a táblára?

Megoldás: Legyen a táblára felírt három szám x , y és z . Ekkor

$$\frac{xy}{z} = 16 \text{ és } \frac{x}{y} \cdot z = y$$

Érvényes, s az első egyenlőségéből kifejezve z -t és behelyettesítve a második egyenlőségbe adódik

$$z = \frac{xy}{16} \text{ és } \frac{x^2 y}{16} = y, \text{ amelyből } x^2 = 16y.$$

Az utolsó egyenlőségéből látjuk, hogy y négyzetszám, lehetséges értékei tehát 1, 4, 9.

$y = 1$ esetén $x = 4$ és $z = \frac{1}{4}$, ami nem lehetséges.

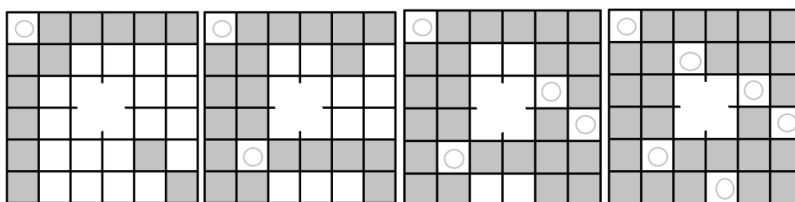
$y = 4$ esetén $x = 8$ és $z = 2$, ami lehetséges megoldás.

$y = 9$ esetén $x = 12$ és $z = \frac{27}{4}$, ami nem lehetséges.

A táblára felírt számok tehát 8, 4 és 2.

3. Az ábrán látható négyzetrács közepe kilyukadt. Hányféleképpen tudnál elhelyezni 6 bábút az épen maradt négyzetekre úgy, hogy minden sorban, minden oszlopban és mindkét átlóban pontosan egy legyen?

Megoldás: Először helyezzünk el egy bábút a bal felső sarokból induló átlón. Ezt 4 féleképpen tehetjük meg. Ezzel a lépéssel egy sorba és egy oszlopba is került bábú, így az ábrán látható módon, a satírozott négyzetekre már nem helyezhetünk másikat. A másik átlóra már csak kétféleképpen helyezhetünk bábút. A harmadik sorban 2 lehetőségünk van, de a negyedikben így már nem választhatunk. Ugyanez a helyzet a második és a hatodik sorban is.



Összesen tehát $4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ féleképpen helyezhetjük el a 6 bábút.

4. Az ABC derékszögű háromszögben az átfogó hossza 20 cm. A háromszög beírt körének r és köréírt körének R sugara úgy aránylanak egymáshoz, mint $2:5$. Számold ki a háromszög kerületét és területét!

Megoldás: Jelölje O az ABC háromszög beírt körének, S pedig a háromszög köréírt körének középpontját. Legyenek E , F és G , rendre, az O pontból a háromszög BC , AC és AB oldalaira állított merőleges egyenesek talppontjai. Ekkor érvényesek a következők: $|AC| = b$, $|BC| = a$, $|AB| = c = 20$ cm, $|CF| = |CE| = |ED| = |DF| = r$, $|AF| = |AG| = b - r$, $|BE| = |BG| = a - r$.

A derékszögű háromszög sajátosságából következik, hogy $R = \frac{c}{2} = 10$ cm.

Az $r : R = 2 : 5$ arányból kapjuk, hogy $r = 4$ cm.

Továbbá igaz, hogy $|AB| = |AG| + |GB| = b - r + a - r = 20$, ezért innen

$$a + b = 20 + 2r = 28 \text{ cm}.$$

A háromszög kerülete így $K = (a + b) + c = 28 + 20 = 48$ cm.

Mivel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ és $a^2 + b^2 = c^2$, ezért $2ab = (a + b)^2 - c^2$, illetve $2ab = 384$, azaz $ab = 192$.

A ABC háromszög területe tehát

$$T = \frac{ab}{2} = \frac{192}{2} = 96 \text{ cm}^2.$$

