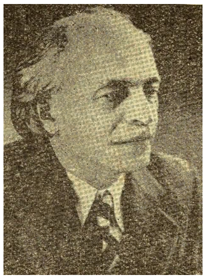

XII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2014. december 6.

<u>12. évfolyam</u>

1. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\sqrt{\log_{0,04} x+1}+\sqrt{\log_{0,2} x+3}=1.$$

2. Oldd meg a valós számok halmazán a $\dfrac{\sin x+\mathrm{tg}x}{\cos x+\mathrm{ctg}x}>0$ **egyenlőtlenséget!**

3. Igazold, hogy bármely téglatest V **térfogata és** F **felszíne között fennáll a** $216V^2\le F^3$ **egyenlőtlenség! Mikor állhat fenn egyenlőség?**

4. Állítsd elő az

$$S=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{2013^2}+\frac{1}{2014^2}}$$

összeget $S=\dfrac{p}{q}$ **alakban, ahol** $p,q\in N$ **és** p,q **relatív prímek!**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

MEGOLDÁSOK – <u>12. évfolyam</u>

1. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\sqrt{\log_{0,04} x+1}+\sqrt{\log_{0,2} x+3}=1.$$

Megoldás: Az értelmezési tartomány meghatározása a következő gondolatmenettel történik:

$$x>0 \quad \wedge \quad \log_{0,04} x>-1 \quad \wedge \quad \log_{0,2} x>-3$$

$$x>0 \quad \wedge \quad \log_{0,04} x \geq \log_{0,04}(0,04)^{-1} \quad \wedge \quad \log_{0,2} x \geq \log_{0,2}(0,2)^{-3}$$

$$x>0 \quad \wedge \quad x \leq \frac{100}{4} \quad \wedge \quad x \leq \left(\frac{10}{2}\right)^3$$

$$x>0 \quad \wedge \quad x \leq 25 \quad \wedge \quad x \leq 125$$

$$0<x \leq 25.$$

Használjuk fel, hogy $\log_{0,04} x=\log_{0,2^2} x=\frac{1}{2}\log_{0,2} x$, és vezessük be a $\log_{0,2} x=t$ helyettesítést. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\sqrt{\frac{1}{2}t+1}+\sqrt{t+3}=1,$$

illetve négyzetre emeléssel

$$\frac{1}{2}t+1+2\cdot\sqrt{\frac{1}{2}t+1}\cdot\sqrt{t+3}+t+3=1$$

$$2\cdot\sqrt{\frac{1}{2}t+1}\cdot\sqrt{t+3}=-\frac{3}{2}t-3, \qquad -\frac{3}{2}t-3\geq 0$$

$$4\cdot\left(\frac{1}{2}t+1\right)\cdot\left(t+3\right)=\frac{9}{4}t^2+9t+9,$$

$$\left(2t+4\right)\cdot\left(t+3\right)=\frac{9}{4}t^2+9t+9,$$

$$2t^2+10t+12=\frac{9}{4}t^2+9t+9,$$

$$-\frac{1}{4}t^2+t+3=0,$$

$$t^2-4t-12=0 \quad \Leftrightarrow \quad t_1=6 \ \vee \ t_2=-2$$

A $t_1=6$ megoldás nem elégíti ki a $-\frac{3}{2}t-3\geq 0$ feltételt, s így az egyetlen megoldás a

$$t_2=-2 \quad \Leftrightarrow \quad \log_{0,2} x=-2 \quad \Leftrightarrow \quad x=0,2^{-2}=5^2 \quad \Leftrightarrow \quad x=25.$$

2. Oldd meg a valós számok halmazán a $\frac{\sin x + \mathrm{tg}x}{\cos x + \mathrm{ctg}x} > 0$ egyenlőtlenséget!

Megoldás:

$$\frac{\sin x + \mathrm{tg}x}{\cos x + \mathrm{ctg}x} = \frac{\sin^2 x(\cos x + 1)}{\cos^2 x(\sin x + 1)} > 0$$

Értelmezési tartomány: $\sin x \neq 0, \cos x \neq 0, \sin x \neq -1$, azaz $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in Z$.

Tudjuk, hogy $\sin^2 x > 0$ és $\cos^2 x > 0$. Ekkor

$$\frac{\sin^2 x(\cos x + 1)}{\cos^2 x(\sin x + 1)} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\cos x + 1}{\sin x + 1} > 0$$

amely összevetve az értelmezési tartománnyal is, akkor teljesül, ha:

a) $\sin x + 1 > 0 \ \wedge \ \cos x + 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x > -1 \ \wedge \ \cos x > -1 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in Z$

b) $\sin x + 1 < 0 \ \wedge \ \cos x + 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x < -1 \ \wedge \ \cos x < -1$
amiből pedig nem kapunk megoldást.

Összefoglalva, az egyenlőtlenség megoldáshalmaza : $M = R \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} \right\}, k \in Z$.

3. Igazold, hogy bármely téglatest V térfogata és F felszíne között fennáll a $216V^2 \leq F^3$ egyenlőtlenség! Mikor állhat fenn egyenlőség?

Megoldás: Ha a téglatest élei $a, b, c,$ akkor $V = abc,\ F = 2(ab + bc + ac)$.
A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt

$$\frac{ab + bc + ac}{3} \geq \sqrt[3]{abbcac} = \sqrt[3]{(abc)^2} = \sqrt[3]{V^2}\ ,$$

s így

$$F = 2\left(ab + bc + ac\right) = 6 \cdot \frac{ab + bc + ac}{3} \geq 6 \cdot \sqrt[3]{V^2},$$

amelyből köbre emeléssel kapjuk, hogy $F^3 \geq 216 \cdot V^2$ (ezt kellett bizonyítani).

Az egyenlőség akkor áll fenn, amikor $ab = bc = ac,$ ami ekvivalens azzal, hogy $a = b = c$, vagyis amikor a téglatest kocka:

$$ab = bc \Leftrightarrow ab - bc = 0 \Leftrightarrow b(a - c) = 0 \Leftrightarrow b = 0 \vee a = c\ ,$$

mivel $b = 0$ nem lehetséges, így $a = c$. Hasonlóan $b = c$, illetve $a = c$.

4. Állítsd elő az

$$S=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{2013^2}+\frac{1}{2014^2}}$$

összeget $S=\frac{p}{q}$ **alakban, ahol** $p,q\in N$ **és** p,q **relatív prímek!**

Megoldás: Alakítsuk a gyök alatti kifejezéseket a következőképpen:

$$1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{n^2(n+1)^2+(n+1)^2+n^2}{n^2(n+1)^2}=\frac{n^2(n^2+2n+1)+n^2+2n+1+n^2}{n^2(n+1)^2}=$$

$$=\frac{n^4+2n^3+n^2+n^2+2n+1+n^2}{n^2(n+1)^2}=\frac{n^4+n^2+1+2n^3+2n^2+2n}{n^2(n+1)^2}=\frac{(n^2+n+1)^2}{n^2(n+1)^2},$$

így

$$\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=\sqrt{\frac{(n^2+n+1)^2}{n^2(n+1)^2}}=\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}=\frac{n(n+1)+1}{n(n+1)}=1+\frac{1}{n(n+1)}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

Ekkor

$$S=\left(1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{2012}-\frac{1}{2013}\right)+\left(1+\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}\right)$$

$$S=2013+1-\frac{1}{2014}=2014-\frac{1}{2014}=\frac{2014^2-1}{2014},$$

vagyis

$$S=\frac{4\ 056\ 195}{2014}.$$