

XII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2014. december 6.

7. évfolyam

1. Peti és édesapja életkorának összege 41. Peti 17 év múlva feleannyi idős lesz mint édesapja, és 14 év múlva feleannyi, mint édesanyja. Hány évesek a családtagok most?

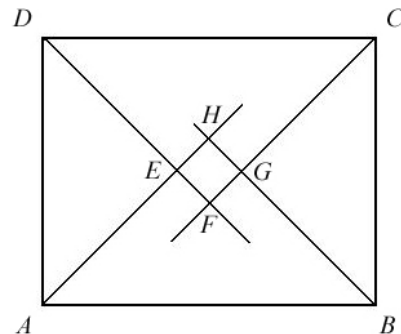
2. A „MATEK” szó minden betűjének megfeleltetünk egy számjegyet. A számjegyekre igazak a következők:

$$\begin{aligned}M + A + T + E + K &= 21, \\M + A + T &= 12, \\A \cdot T &= 21, \\T + E &= 8, \\K : M &= 2.\end{aligned}$$

Melyik ötjegyű számot rejti a „MATEK” szó?

3. A 2015 olyan szám, amely osztható 5-tel és a számjegyeinek a szorzata 0. Hány ilyen négyjegyű szám van?

4. Az $ABCD$ téglalap szomszédos oldalainak hossza 8 cm és 6 cm . A belső szögfelezőinek metszéspontjai az E , F , G , H pontok (lásd az ábrán!). Mekkora az FH szakasz hossza?



A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

MEGOLDÁSOK – 7. évfolyam

1. Peti és édesapja életkorának összege 41. Peti 17 év múlva feleannyi idős lesz mint édesapja, és 14 év múlva feleannyi, mint édesanyja. Hány évesek a családtagok most?

Megoldás: Peti és édesapja 17 év múlva együtt 34 évvel lesznek idősebbek mint most, azaz összesen 75 évesek lesznek. Ekkor Peti 25, édesapja pedig 50 éves lesz. Ez azt jelenti, hogy most 8 illetve 33 évesek. 14 év múlva Peti 22 éves, feleannyi, mint édesanyja, aki ekkor 44 éves. Így Peti édesanyja most 30 éves.

2. A „MATEK” szó minden betűjének megfeleltetünk egy számjegyet. A számjegyekre igazak a következők:

$$\begin{aligned}M + A + T + E + K &= 21, \\M + A + T &= 12, \\A \cdot T &= 21, \\T + E &= 8, \\K : M &= 2.\end{aligned}$$

Melyik ötjegyű számot rejti a „MATEK” szó?

Megoldás: A harmadik egyenletből $A \cdot T = 21$, ahonnan következik, hogy $A = 3$ és $T = 7$ vagy $A = 7$ és $T = 3$.

a) Ha $A = 3$ és $T = 7$, akkor a $T + E = 8$ egyenlőségből következik, hogy $E = 1$.

$M + A + T + E + K = 21$ és $M + A + T = 12$ egyenlőségek miatt $12 + 1 + K = 21$, azaz $K = 8$.

$M + A + T = 12$ egyenlőségből következik, hogy $M + 3 + 7 = 12$, tehát $M = 2$.

Ekkor viszont $K : M = 2$ nem teljesül, tehát ez nem megoldás.

b) Ha $A = 7$ és $T = 3$, akkor a $T + E = 8$ egyenlőségből következik, hogy $E = 5$.

$M + A + T + E + K = 21$ és $M + A + T = 12$ egyenlőségek miatt $12 + 5 + K = 21$, azaz $K = 4$.

$M + A + T = 12$ egyenlőségből következik, hogy $M + 7 + 3 = 12$, tehát $M = 2$.

Ekkor $K : M = 2$ is teljesül. A kapott számok valamennyi egyenletet igazgá teszik.

A keresett ötjegyű szám: 27354.

3. A 2015 olyan szám, amely osztható 5-tel és a számjegyeinek a szorzata 0. Hány ilyen négyjegyű szám van?

Megoldás: A feltételeknek azok a négyjegyű számok tesznek eleget, amelyek számjegyei között van nulla (nem az első helyen) és 0-ra vagy 5-re végződnek.

1. Először számoljuk össze a 0-ra végződő ilyen számokat:

— — — 0.

A három vonalra beírható a 100, 101, 102, ..., 999, ez összesen $999 - 99 = 900$ szám.

2. Most számoljuk meg azokat a számokat, amelyek 5-re végződnek és pontosan 1 darab 0-t tartalmaznak. Ez a nulla legyen a második helyen:

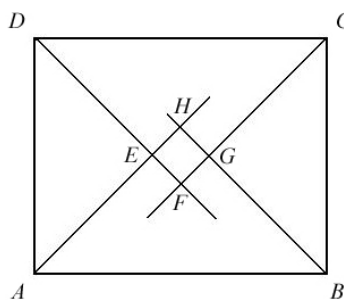
— 0 — 5.

A vonalkák helyére 10-től 99-ig bármelyik számot be lehet írni, kivéve a 10-et, 20-at, ..., 90-et. Ez összesen $99 - 9 - 9 = 81$ lehetőség. Ugyanez a helyzet akkor is, ha a nullát a harmadik helyen rögzítjük. Vagyis 162 lehetőséget számoltunk össze.

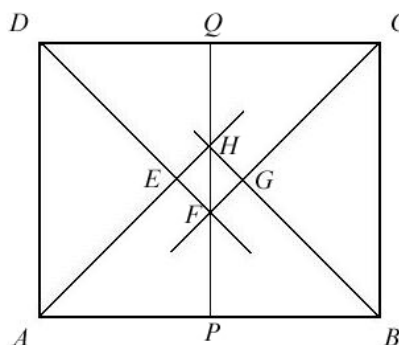
3. Most számoljuk meg azokat a számokat, amelyek 5-re végződnek és pontosan két 0-t tartalmaznak: — 0 0 5. Ezekből összesen 9 van.

Mivel kimerítettük a feltételeknek megfelelő számok halmazát, és mindegyiket csak egyszer számoltuk, így a megoldás: $900 + 162 + 9 = 1071$ szám.

4. Az $ABCD$ téglalap szomszédos oldalainak hossza 8 cm és 6 cm . A belső szögfelezőinek metszéspontjai az E, F, G, H pontok (lásd az ábrán!). Mekkora az FH szakasz hossza?



Megoldás: Az FH szakaszra illesszünk egy egyenest. Ez az egyenes az AB oldalt a P , a CD oldalt a Q pontban metszi (lásd az ábrát!).



Az ábra szimmetriája miatt a PQ szakasz merőlegesen felezi a téglalapot, vagyis $\angle APF$ derékszög és P pont oldalfelezőpont. Mivel az AE félegyenes a $\angle PAD$ szögfelezője, ezért $\angle HAP = 45^\circ$. Így az $\triangle APH$ háromszög egyik szöge derékszög, a másik 45° , azaz $\triangle APH$ háromszög egy egyenlő szárú derékszögű háromszög és $PH = AP$. Ezek alapján

$$HQ = QP - PH = AD - AP = AD - \frac{AB}{2} = 6 - \frac{8}{2} = 2.$$

Hasonlóan $FP = 2$. Ezek alapján

$$FH = PQ - (PF - HQ) = 6 - (2 + 2) = 2,$$

azaz a kérdéses szakasz 2 cm .