XIV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2016. december 3.

9. évfolyam

1. Fekete Kalóz kapitány és legénysége hosszas küzdelem után elfoglalt egy kereskedőhajót. A hajón talált arannyal teli kincsesláda tartalmának harmadát Fekete Kalóz kapitány megtartotta magának. A többit szétosztotta a legénység tagjai között. A rangidős kapott 20 **aranyat és a maradék tizedét, a következő** 40 **aranyat és a maradék tizedét, a harmadik** 60 **aranyat és a maradék tizedét és így tovább. Így a legénység tagjai mind ugyanannyi aranyat kaptak. Összesen hány kalóz élte túl a küzdelmet és osztozott a kincsen? Mennyi arany volt a ládában?**

2. Legyenek $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{2015}, x_{2016}$ **egymást követő egész számok, és legyen**

$$-x_0 + x_1 - x_2 + x_3 - \ldots - x_{2014} + x_{2015} - x_{2016} = 2017.$$

Mennyivel egyenlő az x_{2016} **szám?**

3. Legyen ABC **olyan derékszögű háromszög (derékszöggel a** C **csúcsnál), amelyben** $|AC| > |BC|$ **teljesül. Legyen** D **az** $\overline{AB}$ **átfogó felezőpontja,** p **pedig a** D **ponton áthaladó** CD **egyenesre merőleges egyenes. A** p **egyenes a** BC **egyenest** E **pontban, az** $\overline{AC}$ **szakaszt pedig** F **pontban metszi. Bizonyítsd be, hogy a** C **csúcsból az átfogóra húzott merőleges felezi az** $\overline{EF}$ **szakaszt!**

4. Fekete Kalóz kapitány kalózhajóján a matrózoknak pontosan kétharmada félszemű, háromnegyede falábú, négyötöde kampókezű, és öthatoda kopasz. A hajón a matrozók közül pontosan azok tisztek, akik félszeműek, falábúak, kampókezűek és kopaszok is egyben. A tisztek száma 5**, és azt is tudjuk, hogy a tisztek matrózoknak is számítanak! Hány fős a kalózhajó legénysége?**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XIV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
MEGOLDÁSOK – 9. évfolyam

1. Fekete Kalóz kapitány és legénysége hosszas küzdelem után elfoglalt egy kereskedőhajót. A hajón talált arannyal teli kincsesláda tartalmának harmadát Fekete Kalóz kapitány megtartotta magának. A többit szétosztotta a legénység tagjai között. A rangidős kapott 20 **aranyat és a maradék tizedét, a következő** 40 **aranyat és a maradék tizedét, a harmadik** 60 **aranyat és a maradék tizedét és így tovább. Így a legénység tagjai mind ugyanannyi aranyat kaptak. Összesen hány kalóz élte túl a küzdelmet és osztozott a kincsen? Mennyi arany volt a ládában?**

Megoldás: A legénység x aranypénzen osztozik. Az első két kalóz ugyanannyi aranyat kapott, ezért felírható, hogy:

$$20+\frac{x-20}{10}=40+\frac{x-60-\frac{x-20}{10}}{10},$$

ahonnan $x=1620$. Az első két matróz 180 aranyat kapott, így a többiek is ennyit, azaz 9-en osztoztak a 1620 aranyon. A kapitány is él, és ő 810 aranyat zsebelt be. Tizen élték túl a küzdelmet és összesen 2430 aranyat találtak.

2. Legyenek $x_0,x_1,x_2,\dots,x_{2015},x_{2016}$ egymást követő egész számok, és legyen

$$-x_0+x_1-x_2+x_3-\ldots-x_{2014}+x_{2015}-x_{2016}=2017\,.$$

Mennyivel egyenlő az x_{2016} szám?

Megoldás: Mivel $x_0,x_1,x_2,\dots,x_{2015},x_{2016}$ egymást követő egész számok, ezért

$$-x_0+x_1=1,\ -x_2+x_3=1,\dots,\ -x_{2014}+x_{2015}=1\,.$$

A fentiek alapján az adott egyenlőség felírható, mint

$$\left(-x_0+x_1\right)+\left(-x_2+x_3\right)+\ldots+\left(-x_{2014}+x_{2015}\right)-x_{2016}=2017,$$

azaz $1008-x_{2016}=2017$, ahonnan adódik, hogy $x_{2016}=-1009$.

3. Legyen ABC olyan derékszögű háromszög (derékszöggel a C csúcsnál), amelyben $|AC|>|BC|$ teljesül. Legyen D az $\overline{AB}$ átfogó felezőpontja, p pedig a D ponton áthaladó CD egyenesre merőleges egyenes. A p egyenes a BC egyenest E pontban, az $\overline{AC}$ szakaszt pedig F pontban metszi. Bizonyítsd be, hogy a C csúcsból az átfogóra húzott merőleges felezi az $\overline{EF}$ szakaszt!

Megoldás: Legyen $BAC\angle=\alpha$, $ABC\angle=\beta$ és $|AC|>|BC|$, valamint legyen az M pont a C csúcsból az átfogóra húzott merőleges és az $\overline{EF}$ szakasz metszéspontja. Mivel minden derékszögű háromszög köréírható körének középpontja az átfogó felezőpontja, így a D pont az ABC háromszög köréírható körének középpontja. Ebből adódik, hogy $|DA|=|DC|$, vagyis az ADC háromszög egyenlő szárú és ezért

$$DCA\angle=CAD\angle=CAB\angle=\alpha\text{, valamint } CEM\angle=CED\angle=DCA\angle=\alpha,$$

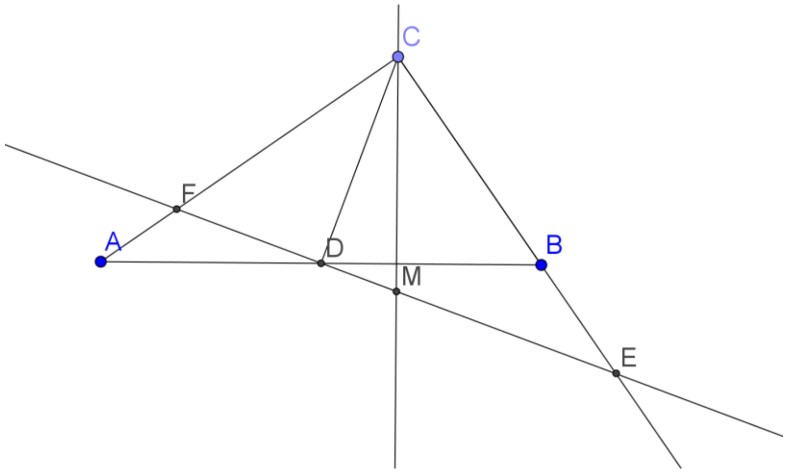
mert merőleges szárú hegyesszögek. Hasonlóan kapjuk, hogy $MCB\angle=BAC\angle=\alpha$, mert szintén merőleges szárú hegyesszögek. Ebből következik, hogy $CEM\angle=MCB\angle=MCE\angle=\alpha$, amiből jön, hogy az MEC háromszög egyenlő szárú, tehát $|MC|=|ME|$. Továbbá, $MCF\angle=MCA\angle=ABC\angle=\beta$, mert ezek is merőleges szárú hegyesszögek. Mivel a $CMF\angle$ az MEC háromszög külső szöge, ebből adódik, hogy $CMF\angle=2\alpha$. Az MCF háromszögben teljesül, hogy

$$MFC\angle + MCF\angle + CMF\angle = 180°, \text{ vagyis } MFC\angle + \beta + 2\alpha = 180°.$$

Mivel $\alpha + \beta = 90°$, ezért $MFC\angle + \alpha = 90°$, azaz $MFC\angle = 90° - \alpha = \beta$. Ebből egyértelműen adódik, hogy az MCF háromszög egyenlő szárú, ahonnan $|MC| = |MF|$ következik. Ebből viszont adódik, hogy

$$|MC| = |MF| = |ME|,$$

ami szerint az M pont felezi az $\overline{EF}$ szakaszt.



4. Fekete Kalóz kapitány kalózhajóján a matrózoknak pontosan kétharmada félszemű, háromnegyede falábú, négyötöde kampókezű, és öthatoda kopasz. A hajón a matrozók közül pontosan azok tisztek, akik félszeműek, falábúak, kampókezűek és kopaszok is egyben. A tisztek száma 5, és azt is tudjuk, hogy a tisztek matrózoknak is számítanak! Hány fős a kalózhajó legénysége?

Megoldás: Először belátjuk, hogy a hajón $S = 60m$ matróz van. A szöveg alapján a matrózok száma 3-mal, 4-gyel, 5-tel és 6-tal osztható, de akkor osztható ezek legkisebb közös többszörösével is azaz 60-nal, tehát

$$S = 60,\ S = 120,\ S = 180,\ \ldots, \text{ ha } m = 1, 2, 3, \ldots$$

Minden nem félszemű matróznak húzzunk a fejére egy kék sapkát, ekkor kiosztottunk $20m$ sapkát. Minden matróznak, aki nem falábú húzzunk a fejére egy piros sapkát, ekkor kiosztottunk $15m$ sapkát. Minden nem kampókezű matróznak húzzunk a fejére egy zöld sapkát, ekkor kiosztottunk $12m$ sapkát. Minden nem kopasz matróznak húzzunk a fejére egy fehér sapkát, ekkor kiosztottunk $10m$ sapkát. Így összesen $57m$ darab sapkát osztottunk ki. Mivel a matrózok száma $60m$, legalább $3m$ olyan matróz van, akinek a fején nincs egyetlen sapka sem, ami éppen azt jelenti, hogy legalább $3m$ matróz rendelkezik mind a négy tulajdonsággal. Mivel a hajón van legalább 5 matróz, ezért az m értéke 2 vagy annál nagyobb, így $3m$ legalább 6, azaz ezek azok, akik mind a négy tulajdonsággal rendelkeznek. Mivel ez a feladat szerint pontosan 5, ezért $m = 1$ lehetséges, vagyis a hajón pontosan 60 matróz szolgál. Hátra van még annak megmutatása, hogy 60 matrózzal kielégíthető a feladat állítása. Ezt mutatja az alábbi táblázatban az ellenőrzés:

Hány fő?	Félszemű	Falábú	Kampókezű	Kopasz
10	x	x	x	
12	x	x		x
13	x		x	x
2			x	x
18		x	x	x
5	x	x	x	x
60	**40**	**45**	**48**	**50**