



XVIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

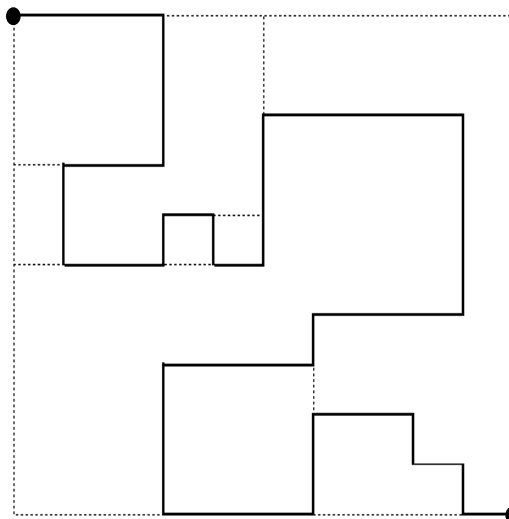
Zenta, 2021. január 30.

6. évfolyam

1. Mihály és anyukája mézeskalácsot készített a Mikulásnak, délután azonban meglátogatták őket Mihály édesszájú unokatestvérei, akik majdnem az összes mézeskalácsot felfalták. Dia a mézeskalácsok negyed részét, Léna a mézeskalácsok ötöd részénél eggyel többet, Zalán a mézeskalácsok harmadánál hárommal kevesebbet, Zénó pedig a mézeskalácsok hatodánál kettővel többet evett meg. Így a Mikulásnak összesen 3 darab mézeskalács maradt. Hány mézeskalács volt összesen?

2. Peti és Misi elcserélték iskolatáskájukat de már csak otthon vették észre. Holnapra nagyon fontos feladatot kell, hogy elkészítsenek, így mindenképpen vissza kell cserélniük a táskákat. Kitalálták, hogy mindketten elindulnak és pontosan félúton fognak találkozni a táskacsere miatt. Az ábrán látható a két fiú kiindulási pontja valamint az útvonal, amit meg kell tenniük. Jelöld be a találkozás pontját az ábrán, valamint állapítsd meg, hogy milyen messze lakik a két fiú egymástól, ha tudjuk, hogy az ábrán látható legkisebb „négyzet” területe 144 négyzetméter.

(Kiindulási pontjaik pedig az ábrán látható nagy négyzet átlójának végpontjai)



3. Mihály órája digitálisan mutatja az időt, s éppen 15:51-kor néz rá. Ez a szám nagyon megtetszik neki, mivel palindrom szám (oda vissza olvasva ugyanaz) így elgondolkodik rajta, hogy hány ilyen palindrom percet tud felfedezni az óráján egy adott napon? (A digitális óra 24 órás formátumú.) Legfeljebb mennyi idő telik el két egymást követő palindrom perc között?

4. Egy szabaduló szoba ajtaját egy négyjegyű számmal lehet kinyitni. A négyjegyű szám a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek segítségével állítható elő úgy, hogy a számjegyek nem ismétlődhetnek. A helyes számkombinációról a következőket tudjuk: A szám 5-tel osztva 4-et ad maradékkal. A négyjegyű szám osztható 12-vel.

A négyjegyű szám tízes helyiértékén egy olyan szám áll, amivel semmiképpen sem kezdődhetne a számkombináció, hiszen akkor nem lenne négyjegyű a szám.

Az ezres és százasként helyiértékek helyén egy 20-nál kisebb prímszám áll. Milyen számkombinációval tudnánk kiszabadulni?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XVIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI – 6. évfolyam

1. Mihály és anyukája mézeskalácsot készített a Mikulásnak, délután azonban meglátogatták őket Mihály édesszájú unokatestvérei, akik majdnem az összes mézeskalácsot felfalták. Dia a mézeskalácsok negyed részét, Léna a mézeskalácsok ötöd részénél eggyel többet, Zalán a mézeskalácsok harmadánál hárommal kevesebbet, Zénó pedig a mézeskalácsok hatodánál kettővel többet evett meg. Így a Mikulásnak összesen 3 darab mézeskalács maradt. Hány mézeskalács volt összesen?

Megoldás: Jelölje x a mézeskalácsok számát. A következő összefüggést tudjuk felírni:

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x + 1 + \frac{1}{3}x - 3 + \frac{1}{6}x + 2 + 3 = x.$$

Rendezve adódik, hogy

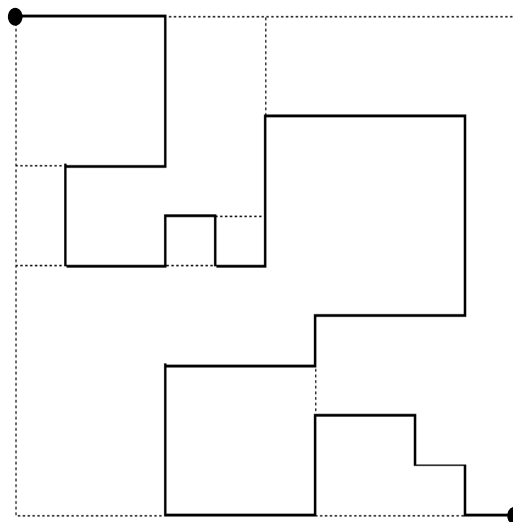
$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}x + 3 = x.$$

Szorozzuk be az egyenlet mindkét oldalát a nevezőben levő számok legkisebb közös többszörösével, azaz 60-nal. Megkapjuk, hogy $15x + 12x + 20x + 10x + 180 = 60x$.

Rendezve adódik, hogy $3x=180$, vagyis $x=60$.

A válasz tehát a következő: 60 sütemény volt eredetileg.

2. Peti és Misi elcserélték iskolatáskájukat de már csak otthon vették észre. Holnapra nagyon fontos feladatot kell, hogy elkészítsenek, így mindenképpen vissza kell cserélniük a táskákat. Kitalálták, hogy mindketten elindulnak és pontosan félúton fognak találkozni a táskacsere miatt. Az ábrán látható a két fiú kiindulási pontja valamint az útvonal, amit meg kell tenniük. Jelöld be a találkozás pontját az ábrán, valamint állapítsd meg, hogy milyen messze lakik a két fiú egymástól, ha tudjuk, hogy az ábrán látható legkisebb „négyzet” területe 144 négyzetméter. (Kiindulási pontjaik pedig az ábrán látható nagy négyzet átlójának végpontjai)



Megoldás: A 144 négyzetméterből meg tudjuk kapni a legkisebb törött vonal hosszát, ami 12 méter, nevezzük ezt 1 egységnek. Megvizsgálva az ábra bal felső negyedét láthatjuk, hogy a legkisebb négyzet bal szomszédja egy négyszer akkora négyzet, melynek oldalai kétszer akkorák. Az utóbbi rész felső szomszédjának éle viszont egy egységgel nagyobb az előzőtől, nevezzük 3 egységnek.

Ezen arányok meghatározásával meg tudjuk a többi negyedekben is határozni a törött vonalak hosszát, így megkaphatjuk, hogy a törött vonal hosszúsága egységekben mérve:

$$3+3+2+2+2+1+1+1+1+3+4+4+3+1+3+3+3+2+2+1+1+1+1=48 \text{ egység.}$$

A 48 egység méterben kifejezve $48 \cdot 12 = 576$ méter, azaz 576 méterre lakik egymástól a két tanuló.

3. Mihály órája digitálisan mutatja az időt, s éppen 15:51-kor néz rá. Ez a szám nagyon megtetszik neki, mivel palindrom szám (oda vissza olvasva ugyan az) így elgondolkodik rajta, hogy hány ilyen palindrom percet tud felfedezni az óráján egy adott napon? (A digitális óra 24 órás formátumú.) Legfeljebb mennyi idő telik el két egymást követő palindrom perc között?

Megoldás: Felsorolással megkaphatók a lehetséges palindrom esetek: (azt is kell indokolni, hogy egyéb eset miért nem lehet)

0000 0110 0220 0330 0440 0550 1001 1111 1221 1331 1441
1551 2002 2112 2222 2332

Ez 16 esetet jelent.

Meg kell vizsgálni, hogy melyik lehet a legnagyobb távolság 2 palindrom perc között. Szóba jöhet a 05:50 és 10:01 szomszédság valamint a 15:51 és 20:02 szomszédság.

Az első és a második esetben is 4 óra 11 perc a különbség a 2 időpont között, így a legtöbb idő ami eltelik két szomszédos palindrom perc között az 4 óra 11 perc.

4. Egy szabaduló szoba ajtaját egy négyjegyű számmal lehet kinyitni. A négyjegyű szám a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek segítségével állítható elő úgy, hogy a számjegyek nem ismétlődhetnek. A helyes számkombinációról a következőket tudjuk: A szám 5-tel osztva 4-et ad maradékkal. A négyjegyű szám osztható 12-vel.

A négyjegyű szám tízes helyiértékén egy olyan szám áll, amivel semmiképpen sem kezdődhetne a számkombináció, hiszen akkor nem lenne négyjegyű a szám.

Az ezres és százasként helyiértékek helyén egy 20-nál kisebb prímszám áll. Milyen számkombinációval tudnánk kiszabadulni?

Megoldás: A harmadik feltételből azt kapjuk, hogy a tízesek helyiértékén a 0 áll, azaz $xx0x$ a helyes kombináció egyik értéke

A második feltételből azt kapjuk, hogy a szám vagy 4-re vagy 8-ra végződik, hiszen ahhoz, hogy 12-vel osztható legyen osztható kell, hogy legyen 3-mal és 4-gyel is, 4-gyel pedig pontosan akkor osztható, ha utolsó két számjegyén álló kétjegyű szám osztható 4-gyel. Ez nem lehet más, mint a 04 és 08.

Az első feltételből kiderül, hogy az utolsó számjegy 4 vagy 9 lehet, de a 9-es számjegy nem lehetséges, mivel akkor nem lenne 4-gyel osztható a kódszám.

Ezzel már felét meghatároztuk a helyes számkombinációnak: $xx04$

A negyedik feltétel, hogy a századok és ezresek helyén álló számnak 20-nál kisebb prímszámnak kell lennie, így a lehetséges esetek: 11; 13; 17; 19. (Egyjegyű prímek nem jöhetnek szóba, hiszen 0-val nem kezdődhet a kód, illetve a számjegyek sem ismétlődhetnek és a 0-nak már meghatároztuk a helyét.)

Le kell még ellenőrizni a lehetséges kód kombinációkat:

A 11 nem jó, hiszen nem ismétlődhetnek a számjegyek és a 3-mal való oszthatóság sem teljesül.

A 13 nem jó, mert $1+3+0+4=8$, így a számjegyek összege nem osztható 3-mal.

A 19 szintén nem jó, hiszen a számjegyek összege 14, ami nem osztható 3-mal.

A 17 lesz a megfelelő szám, mivel $1+7+0+4=12$, ami $3 \cdot 4$, tehát osztható 3-mal.

Mindent kivizsgálva a 1704-es kombinációval tudunk kiszabadulni.