



XX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2022. december 3.

9. évfolyam

1. Egy sportversenyen 15 csapat vett részt, és minden csapat minden csapattal egyszer mérkőzött meg. A győzelemért 3, a döntetlenért 2, a vereségért 1 pont járt. A verseny végén minden csapatnak más volt a pontszáma, az utolsó csapat 21 pontot szerzett. Igaz-e, hogy a győztes csapat legalább egyszer döntetlent játszott?
2. Keressük meg az összes olyan kétjegyű számot, amelyre igaz, hogy ha a számot elosztjuk a számjegyei szorzatával, akkor a hányados 5, a maradék 2.
3. Egy derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság a hegyesszögek szögfelezőivel olyan α és β hegyesszögeket zár be, melyek aránya 2:3. Mekkora a derékszögű háromszög hegyesszögei?
4. Legyen az $x_1, x_2, \dots, x_{2022}$ egész számok szorzata 1.
 - a) Bizonyítsd be, hogy az $x_1 + x_2 + \dots + x_{2022}$ összeg nem osztható 4-gyel!
 - b) Számoljuk ki az $\left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right)\left(x_2 + \frac{1}{x_3}\right) \dots \left(x_{2022} + \frac{1}{x_1}\right)$ kifejezés lehetséges értékét!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI – 9. évfolyam

1. Egy sportversenyen 15 csapat vett részt, és minden csapat minden csapattal egyszer mérkőzött meg. A győzelemért 3, a döntetlenért 2, a vereségért 1 pont járt. A verseny végén minden csapatnak más volt a pontszáma, az utolsó csapat 21 pontot szerzett. Igaz-e, hogy a győztes csapat legalább egyszer döntetlent játszott?

Megoldás. A versenyen a csapatok összesen $\frac{15 \cdot 14}{2} = 105$ mérkőzést játszottak. Egy mérkőzésen mindig 4 pont sorsa dőlt el, így együttesen összesen $4 \cdot 105 = 420$ pontot szereztek a csapatok. Mivel az utolsó 21 pontot szerzett, így az őt megelőző legalább 22-t, az őt megelőző 23-at,..., az első legalább 35 pontot szerzett. Mivel

$$21 + 22 + 23 + \dots + 35 = \frac{(21 + 35) \cdot 15}{2} = 28 \cdot 15 = 420,$$

ezért csak ez a lehetőség valósulhatott meg, hogy mindenki a lehető legkevesebb pontot szerezte, azaz az első csapatnak 35 pontja lett 14 mérkőzésből.

Tegyük föl, hogy a 35 pontot kizárólag győzelemből és vereségből érték el. Jelöljük x a győzelmek számát. Ekkor

$$3x + (14 - x) \cdot 1 = 35,$$

$$2x = 21,$$

vagyis x nem lehet egész szám, azaz csak győzelmekkel és vereségekkel nem lehet 35 pontot szerezni. Így a győztes csapat játszott legalább egy döntetlent. Például 10 győzelem, 1 döntetlen és 3 vereség esetén éppen 35 pontot szerezhettek.

2. Keressük meg az összes olyan kétjegyű számot, amelyre igaz, hogy ha a számot elosztjuk a számjegyei szorzatával, akkor a hányados 5, a maradék 2.

Megoldás. A keresett szám legyen $\overline{xy}$ alakú, ahol x nyilván nem lehet 0. A feltétel alapján ha $10x + y$ -t elosztjuk xy -nal, akkor a hányados 5, a maradék 2. Ezek szerint

$$5 \cdot xy + 2 = 10x + y,$$

$$5xy - 10x - y + 2 = 0,$$

$$(5x - 1)(y - 2) = 0.$$

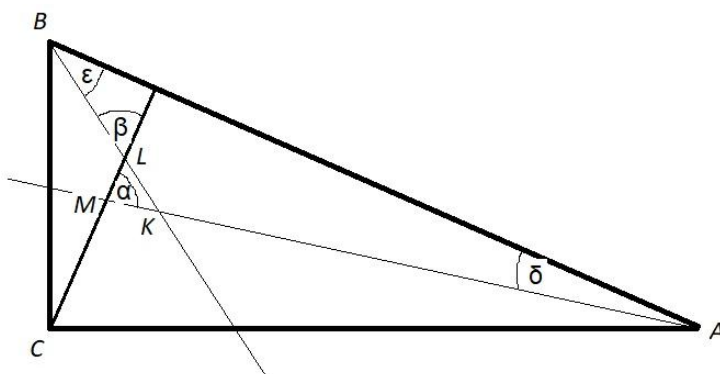
Az első zárójelben semmilyen x számjegy esetén nem kaphatunk nullát, tehát az egyenlet megoldásai: $y = 2$ és x tetszőleges nullától különböző számjegy. A lehetséges megoldások tehát: 12, 22, 32, 42, 52, 62, 72, 82, 92. Ellenőrzéssel azt kapjuk, hogy a 12-n kívül valóban mind megoldása is a feladatnak.

3. Egy derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság a hegyesszögek szögfelezőivel olyan α és β hegyesszögeket zár be, melyek aránya 2:3. Mekkora a derékszögű háromszög hegyesszögei?

Megoldás. Tekintsük az alábbi ábra szerinti jelöléseket. A két szögfelező és a magasságvonal által létrehozott háromszöget KLM háromögnek neveztük el.

Az ABC háromszög hegyesszögeinek összege $2\varepsilon + 2\delta = 90^\circ$, innen $\varepsilon + \delta = 45^\circ$. Ez alapján az AKB háromszögben $\angle AKB = 135^\circ$.

A β -val jelölt szög és a $\angle KLM$ csúcshögek, ezért egyenlők. A KLM háromszögben az $\angle AKB$ külső szög egyenlő a két nem mellette fekvő belső szöggel, vagyis $\alpha + \beta = 135^\circ$.



Mivel a feltétel szerint $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2}{3}$, és ezért $\alpha = \frac{2}{3}\beta$, innen pedig $\frac{2}{3}\beta + \beta = 135^\circ$, ahonnan egyszerű számolással kapjuk, hogy $\beta = 81^\circ$ és $\alpha = 54^\circ$.

A β és az ε szög ugyanannak a derékszögű háromszögnek a hegyesszögei, így $\beta + \varepsilon = 90^\circ$, ahonnan az előzőek alapján $\varepsilon = 9^\circ$. Hasonlóan az α és a δ szög ugyanannak a derékszögű háromszögnek a hegyesszögei, így $\alpha + \delta = 90^\circ$, ahonnan az előzőek alapján $\delta = 36^\circ$.

Az ABC háromszög hegyesszögei tehát $2\varepsilon = 18^\circ$ és $2\delta = 72^\circ$.

4. Legyen az $x_1, x_2, \dots, x_{2022}$ egész számok szorzata 1.

a) Bizonyítsd be, hogy az $x_1 + x_2 + \dots + x_{2022}$ összeg nem osztható 4-gyel!

b) Számoljuk ki az $\left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right)\left(x_2 + \frac{1}{x_3}\right) \dots \left(x_{2022} + \frac{1}{x_1}\right)$ kifejezés lehetséges értékét!

Megoldás. a) Mivel $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{2022} = 1$, ezért $x_1, x_2, \dots, x_{2022} \in \{1, -1\}$, és a -1 -esek száma páros. Jelölje a az 1-esek, b a -1 -esek számát (b páros szám). Ekkor a kérdéses összeg így számítható ki:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_{2022} &= \\ &= a \cdot 1 + b \cdot (-1) = a - b = a + b - 2b = 2022 - 2b = 2022 - 2 \cdot (2k) = 2022 - 4k = \\ &= 2020 - 4k + 2 = 4 \cdot (505 - k) + 2, \end{aligned}$$

ahol k nemnegatív egész szám. Tehát a kérdéses összeg 4-gyel osztva 2-t ad maradékul.

b) Ha mindegyik x_i szám egyenlő 1-gyel, akkor $\left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right)\left(x_2 + \frac{1}{x_3}\right) \dots \left(x_{2022} + \frac{1}{x_1}\right) = 2^{2022}$. Ha

mindegyik x_i szám egyenlő -1 -gyel, akkor $\left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right)\left(x_2 + \frac{1}{x_3}\right) \dots \left(x_{2022} + \frac{1}{x_1}\right) = (-2)^{2022} = 2^{2022}$.

Ha a számok között van 1-es és -1 -es is, akkor van két szomszédos, amelynek különbözik az előjele. Legyenek ezek x_j és x_{j+1} . Ekkor $x_j + \frac{1}{x_{j+1}} = \frac{x_j x_{j+1} + 1}{x_{j+1}} = \frac{-1 + 1}{x_{j+1}} = 0$ miatt az egész szorzat 0 lesz.