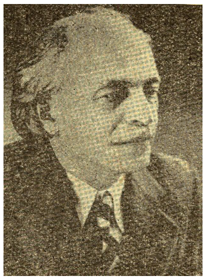


XIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2015. december 5.

7. évfolyam

1. Nevezzünk egy számot *négyosztó*nak, ha négyjegyű, minden számjegye különböző, és mindegyik számjegye osztója a négyjegyű számnak.

a) Melyik a legkisebb *négyosztó* szám?

b) Melyik a legnagyobb *négyosztó* szám?

c) Adj meg még egy *négyosztó* számot, amely különbözik a fenti két számtól.

(A nulla nem osztója egyik számnak sem.)

2. Összeadjuk a páratlan számokat 1205**-től** 2015**-ig.**

a) Hány számot adunk így össze?

b) Melyik szám áll az így kapott összegben az egyesek helyén?

c) Osztható-e ez az összeg 3**-mal?**

3. Egy téglalap átlójának felezőmerőlegese a hosszabb oldalból a rövidebb oldallal egyenlő hosszúságú szakaszt metsz ki. Mekkora szöget zárnak be a téglalap átlói?

(Minden egyes számolási lépésnél hivatkozz arra az összefüggésre, amely alapján a számolást végzed.)

4. Anti és Benő barátok, 70 km**-re laknak egymástól. Egy reggel Benő** 6 **órakor, Anti** 8 **órakor kerékpárral elindult barátja lakása felé, és egyenletes sebességgel haladva** 10 **órakor találkoztak. Ekkor megállapították, hogy Anti és Benő sebességének az aránya** $3:2$ **volt. Hány kilométert kerékpározott Anti illetve Benő a találkozásig?**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

MEGOLDÁSOK – 7. évfolyam

1. Nevezzünk egy számot *négyosztó*nak, ha négyjegyű, minden számjegye különböző, és mindegyik számjegye osztója a négyjegyű számnak.

a) Melyik a legkisebb *négyosztó* szám?

b) Melyik a legnagyobb *négyosztó* szám?

c) Adj meg még egy *négyosztó* számot, amely különbözik a fenti két kérdésben szereplő számtól.

(A nulla nem osztója egyik számnak sem.)

Megoldás: a) A legkisebb négyjegyű szám, amelynek számjegyei különböznek az 1234. Ez nem osztható hárommal. Az 1235 nem jöhet szóba, mert a második számjegye miatt párosnak kell lennie. Nézzük a következőt, az 1236-ot. Mivel itt mindegyik számjegy osztója a számnak, ezért ez a keresett legkisebb szám.
b) Nézzük a legnagyobb különböző számjegyű négyjegyű számot: 9876. Ez nem osztható 9-cel, mert a számjegyek összege 30. A legnagyobb szám, amely 9876-nál kisebb és osztható 9-cel a 9873. Ez viszont páratlan lévén 8-cal nem osztható. Hogy a 9-cel való oszthatóságot megőrizzük, nézzük a következő kilenccel kisebb számot, a 9864-et. Ez megfelel a feltételeknek, így ez a legnagyobb ilyen szám.
c) Sokféle válasz lehetséges.

2. Összeadjuk a páratlan számokat 1205**-től** 2015**-ig.**

a) Hány számot adunk így össze?

b) Melyik szám áll az így kapott összegben az egyesek helyén?

c) Osztható-e ez az összeg 3**-mal?**

Megoldás: a) 1205-től 2015-ig összesen $2015-1204=811$ szám van. Mivel a felsorolást páratlan számmal kezdtük és azzal is fejeztük be, így 1-gyel több páratlan szám van, mint páros. A páratlan számok száma tehát $(811-1):2+1=405+1=406$.

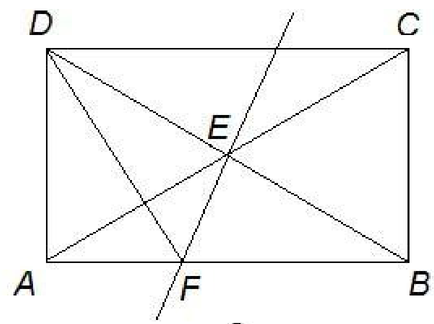
	az összeg utolsó számjegye
1205	5
1207	2
1209	1
1211	2
1213	5
1215	0
1217	7
1219	6
1221	7
1223	0
1225	5

b) Kezdjük elvégezni az összeadást, és figyeljük, hogyan alakul az összeg utolsó számjegye.
A táblázatból leolvasható, hogy 1205-től kezdve összeadogatva a számokat 1225-nél ismét 5-ösre végződik. Mivel ez 20-asával ismétlődik, ezért 1145, 1265, 1285,…, 2005 összege is ötösre fog végződni. Ehhez a további 5 számot hozzáadva leolvasható, hogy az összeg 0-ra végződik.

c) Megfigyelhetjük, hogy csak 3, 6, 9,… darab szomszédos páratlan szám összege osztható hárommal, azaz a hárommal való oszthatóság szükséges feltétele, hogy a tagok összege osztható legyen hárommal. Mivel a) szerint 406 tag van és ez nem osztható hárommal, így az összeg sem osztható hárommal.

3. Egy téglalap átlójának felezőmerőlegese a hosszabb oldalból a rövidebb oldallal egyenlő hosszúságú szakaszt metsz ki. Mekkora szöget zárnak be a téglalap átlói?
(Minden egyes számolási lépésnél hivatkozz arra az összefüggésre, amely alapján a számolást végzed.)

Megoldás: Tekintsük az ábrán látható téglalapot.



A feladat feltételei szerint $DB \perp EF$ és $AF = AD$. Mivel az F pont a DB átló szakaszfelező merőlegesén van, ezért egyenlő távolságra van a D és B pontoktól, tehát $FD = FB$. Így FBD háromszög egyenlő szárú.
Mivel a feltételek alapján az AFD háromszög is egyenlő szárú és derékszögű, ezért az alapon fekvő szögei egyenlők:

$$AFD = ADF = (180° - 90°) : 2 = 45°.$$

BFD szög kiegészítő szöge az AFD szögnek: $BFD\angle = 180° - 45° = 135°$. Korábban láttuk, hogy az FBD háromszög egyenlő szárú, így

$$FBD\angle = (180° - 135°) : 2 = 45° : 2 = 22{,}5°.$$

Mivel FBD szög és DBC szög pótszögek, így $DBC\angle = 90° - 22{,}5° = 67{,}5°$. Az EBC háromszög is egyenlő szárú a téglalap átlóinak tulajdonságából következően, így az átlók által bezárt szög nagysága $BEC\angle = 180° - 2 \cdot 67{,}5° = 180° - 135° = 45°$.

4. Anti és Benő barátok, $70\ \text{km}$**-re laknak egymástól. Egy reggel Benő** 6 **órakor, Anti** 8 **órakor kerékpárral elindult barátja lakása felé, és egyenletes sebességgel haladva** 10 **órakor találkoztak. Ekkor megállapították, hogy Anti és Benő sebességének az aránya** $3:2$ **volt. Hány kilométert kerékpározott Anti illetve Benő a találkozásig?**

I. Megoldás: A fizikában ismert jelöléseket használva a két fiú mozgására felírhatjuk a következőket:

$$\begin{aligned} s_A &= 2v_A \\ s_B &= 4v_B \end{aligned}.$$

A megfelelő oldalakat összeadva, és fölhasználva azt, hogy $s_A + s_B = 70$ és $v_A = \frac{3}{2}v_B$, kapjuk: $70 = 2\cdot\frac{3}{2}v_B + 4v_B$, ahonnan $v_B = 10$, $v_A = 15$. Ezeket a fenti egyenletrendszerbe behelyettesítve megkapjuk, hogy Anti $30\ \text{km}$-t, Benő $40\ \text{km}$-t kerékpározott.

II. Megoldás: Mivel Anti másfélszer gyorsabb volt, így ugyanannyi idő alatt az Anti és Benő által megtett út aránya $3:2$. De mivel Benő kétszer annyi ideig biciklizett, ezért ez az arány $3:4$. Így a 70 kilométerből Anti $30\ \text{km}$-t, Benő $40\ \text{km}$-t tett meg.