



XXIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2025. december 7.

10. évfolyam

1. Hány olyan természetes szám van, amelyből elvéve a számjegyei összegét 2025-öt kapunk?

2. Legyen az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = p^2(x^2 + 2x) + p^2 - 1$ másodfokú függvény, ahol p pozitív valós paraméter, valamint legyen adott a t pozitív valós szám. Mely p érték esetén lesz az f grafikonjának tengelypontja, valamint az x tengellyel vett metszéspontjai által meghatározott háromszög területe pontosan t -vel egyenlő?
(Tengelypontnak nevezzük azt a pontot, ahol a parabola metszi a szimmetriatengelyét.)

3. Határozd meg azokat a p és q prímszámokat, melyre teljesül, hogy p és q ikerprímek és $p^2 - pq + q^2$ is prímszám! (Két prímszám ikerprím, ha különbségük 2.)

4. Az ABC háromszög AC és BC szárain vegyük fel rendre az M és N pontokat, úgy hogy $|AM|:|MC|=1:m$ és $|BN|:|NC|=1:n$ arányok érvényesek legyenek. Határozd meg az $m, n \in \mathbb{N}$, amelyekre teljesül, hogy $T_{ABC}:T_{MNC} = 2:1$.

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XXIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI – 10. évfolyam

1. Hány olyan természetes szám van, amelyből elvéve a számjegyei összegét 2025-öt kapunk?

Megoldás. Jelölje n a természetes számot és $S(n)$ a számjegyek összegét. A fentiekből felírható egy egyenlet $n - S(n) = 2025$, melyből az $n = 2025 + S(n)$ alakú számot kapjuk. Ez alapján a keresett szám egy négyjegyű vagy attól többjegyű szám lehet.

Nézzük először a négyjegyű esetet és próbáljuk meg megbecsülni, hogy milyen intervallumba eshet ez a négyjegyű szám:

Egy négyjegyű szám esetén teljesülnek a következő feltételek: $1000 \leq n \leq 9999$, esetünkben $2025 \leq n \leq 9999$, amiből egyben következik a számjegyek összegére vonatkozó feltétel, mégpedig $S(n) \leq 36$. Így felírható egy becslés n értékére, amely szerint $2025 \leq n \leq 2025 + 36$, azaz $2025 \leq n \leq 2061$.

Most írjuk fel a kezdő egyenletünket kihasználva a négyjegyű szám $\overline{abcd}$ alakját:

$$1000a + 100b + 10c + d - (a + b + c + d) = 2025, \text{ melyet rendezve}$$

$$999a + 99b + 9c = 2025 \text{ azaz}$$

$$9(111a + 11b + c) = 2025 \text{ egyenletet kapjuk.}$$

Vegyük észre, hogy a bal és jobb oldal is osztható 9-cel, így végül a $111a + 11b + c = 225$ egyenlethez jutunk. Bár három ismeretlenes egyenlet, de az a értéke meghatározható, hiszen az csak maximum 2 lehet.

$a = 1$ esetén a $111 + 11b + c = 225$ egyenletet kapjuk, amely nem fog teljesülni semmilyen b, c értékekre, hiszen már $b = 9$, azaz $111 + 99 + c = 225$ esetén is c már kétjegyű szám kellene, hogy legyen, ami nem lehetséges.

$a = 2$ esetén $222 + 11b + c = 225$ egyenlethez jutunk, mely $b = 0$ és $c = 3$ értékek esetén teljesül.

A fentiekből adódik, hogy $\overline{abcd}$ négyjegyű szám nem más, mint $\overline{203d}$ alakú szám, ami benne is lesz a fentebb becsült intervallumban bármely d esetén. Láttuk azt is, hogy az egyenlet nem függ d -től, így valóban d felveheti bármely számjegy értékét.

Így 10 darab négyjegyű ilyen természetes szám létezik mégpedig a 2030, 2031, 2032, 2033, 2034, 2035, 2036, 2037, 2038, 2039 számok.

Most nézzük meg, hogy lehet-e öt- vagy attól többjegyű a keresett szám.

Egy ötjegyű szám esetén teljesülnek a következők: $10000 \leq n \leq 99999$, és $1 \leq S(n) \leq 45$. E két feltétel alapján felírható a következő: $10000 \leq n \leq 2070$, ami egyértelműen ellentmondás. Hasonlóan belátható, hogy n lehet semmilyen más négyjegyűnél többjegyű szám.

2. Legyen az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = p^2(x^2 + 2x) + p^2 - 1$ másodfokú függvény, ahol p pozitív valós paraméter, valamint legyen adott a t pozitív valós szám. Mely p érték esetén lesz az f grafikonjának tengelypontja, valamint az x tengellyel vett metszéspontjai által meghatározott háromszög területe pontosan t -vel egyenlő? (Tengelypontnak nevezzük azt a pontot, ahol a parabola metszi a szimmetriatengelyét.)

Megoldás. Először is alakítsuk át a parabola egyenletét: $f(x) = p^2(x^2 + 2x) + p^2 - 1$. Ebből kiderül, hogy konvex paraboláról van szó, hiszen a főegyüttható p^2 biztosan pozitív szám, ebből az is következik, hogy a függvény tengelypontja a minimumpontja lesz.

Ismert, hogy a minimumpont helye $x_{\min} = \frac{-b}{2a}$, azaz $x_{\min} = \frac{-2p^2}{2p^2} = -1$ és annak értéke $f(-1) = -1$, melyből két fontos információ is következik:

1. az $f(x)$ konvex függvénynek biztosan lesz két valós megoldása bármely $p \neq 0$ esetén,
2. a keresett háromszög magassága $h_a = 1$ egység lesz.

Most határozzuk meg a parabola nullahelyeit:

$$\begin{aligned} p^2x^2 + 2p^2x + p^2 - 1 &= 0 \\ p^2(x^2 + 2x + 1) - 1 &= 0 \\ p^2(x+1)^2 - 1 &= 0 \\ (x+1)^2 - \frac{1}{p^2} &= 0 \\ \left(x+1 - \frac{1}{p}\right)\left(x+1 + \frac{1}{p}\right) &= 0 \\ x_1 = -1 + \frac{1}{p} \text{ és } x_2 = -1 - \frac{1}{p} \end{aligned}$$

Most hogy ismertek a parabola x tengellyel vett metszéspontjai, így meghatározhatjuk a háromszög csúcsainak koordinátáit $(-1, -1)$, $\left(-1 - \frac{1}{p}, 0\right)$, $\left(-1 + \frac{1}{p}, 0\right)$.

A háromszög alapja az x tengelyre illeszkedik, értéke pedig

$$a = |x_1 - x_2| = \left| -1 + \frac{1}{p} - \left(-1 - \frac{1}{p}\right) \right| = \left| \frac{2}{p} \right|, \text{ mivel } p \text{ pozitív valós szám, így } a = \frac{2}{p}.$$

A háromszög területe egyenlő egy adott t valós számértékkel, így felírható, hogy $\frac{a \cdot h_a}{2} = t$, azaz

$$\begin{aligned} a \cdot h_a &= 2t \\ \frac{2}{p} \cdot 1 &= 2t \\ p &= \frac{1}{t} \end{aligned}$$

Tehát a p paraméter értéke a terület reciproka, vagyis a $p = \frac{1}{t}$ megoldást kapjuk.

3. Határozd meg azokat a p és q prímszámokat, melyre teljesül, hogy p és q ikerprímek és $p^2 - pq + q^2$ is prímszám! (Két prímszám ikerprím, ha különbségük 2.)

Megoldás. Az ikerprímeket a következő alakban lehet felírni: $(p, p+2)$, ami alapján ikerprímek a $(3,5)$, $(5,7)$, $(11, 13)$, $(17, 19)$, $(29, 31)$,...

Mivel p és q ikerprímek, így érvényes a következő: $q = p + 2$ vagy $p = q + 2$. Vegyük észre, hogy a vizsgálandó kifejezés szimmetrikus, így elegendő csak az egyik esetet kivizsgálnunk.

Jelölje N azt a prímszámot, melyet az összetett kifejezéssel kapunk, így

$$N = p^2 - pq + q^2.$$

Behelyettesítve $q = p + 2$ -et $N = p^2 - p(p + 2) + (p + 2)^2 = p^2 + 2p + 4$ kapunk.

Tovább alakítva a kifejezést $N = p^2 + 2p + 1 + 3 = (p + 1)^2 + 3$ alakú számot kapunk.

Nézzünk meg néhány esetet:

(3,5) esetén $N = (3 + 1)^2 + 3 = 19$, ami prím, tehát a választott ikerprímek megoldás.

(5,7) esetén $N = (5 + 1)^2 + 3 = 39$, ami nem prím, így nem lesz megoldás.

(11,13) esetén $N = (11 + 1)^2 + 3 = 147$, ami nem prím, így nem lesz megoldás.

(17,19) esetén $N = (17 + 1)^2 + 3 = 327$, ami szintén nem prím.

Észrevehetjük, hogy a kapott értékek 3-mal osztható számok, ezért nézzük hogyan viselkedik a kifejezés általános esetben.

(p, q) esetén p és q között pontosan egy szám található, mégpedig a $p + 1$, ezért vizsgálhatjuk a következő számhármast: $p, p + 1, p + 2$, ami három egymást követő szám, amiről azt is tudjuk, hogy az egyik tag biztosan osztható 3-mal.

$p > 3$ esetében a számhármásban p és $p + 2$ biztosan prímek, $p + 1$ pedig nem prím, így neki kell oszthatónak lennie 3-mal. Ebben az esetben pedig az $N = (p + 1)^2 + 3$ kifejezés biztosan osztható lesz 3-mal, így nem kaphatunk prímszámot N értékére.

Tehát a feladat megoldásai a (3,5) és (5,3) ikerprímpárok.

4. Az ABC háromszög AC és BC szárain vegyük fel rendre az M és N pontokat, úgy hogy $|AM| : |MC| = 1 : m$ és $|BN| : |NC| = 1 : n$ arányok érvényesek legyenek. Határozd meg az $m, n \in \mathbb{N}$, amelyekre teljesül, hogy $T_{ABC} : T_{MNC} = 2 : 1$.

Megoldás. A feladat megoldásához mindenképpen készítsünk ábrát, vigyázzunk arra, hogy ne speciális esetben vegyük fel az M és N pontokat és a vizsgált $ABC\Delta$ és $MNC\Delta$ ne legyenek hasonlóak.

Induljunk ki a területek arányából, a területeket pedig írjuk fel úgy, hogy közös száron legyenek a háromszög alapjai.

Legyen AD az $ABC\Delta$ magassága, valamint az MD az $MNC\Delta$ magassága.

$$\text{Ekkor } T_{ABC} = \frac{|BC| \cdot |AD|}{2} \text{ és } T_{MNC} = \frac{|NC| \cdot |ME|}{2}.$$

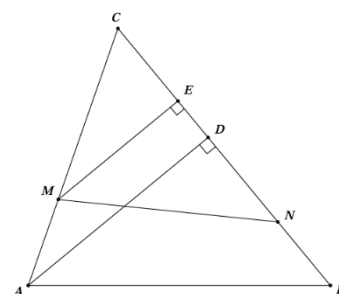
A kívánt arány alapján pedig felírhatjuk, hogy: $\frac{|BC| \cdot |AD|}{2} : \frac{|NC| \cdot |ME|}{2} = 2 : 1$, melyet rendezve $|BC| \cdot |AD| = 2 \cdot |NC| \cdot |ME|$ összefüggést kapjuk.

Nézzük meg az ábrát és vegyük észre, hogy $ADC\Delta$ és $MEC\Delta$ hasonlóak, hiszen szögeik páronként egyenlők. Emiatt felírható $|AC| : |MC| = |AD| : |ME|$.

Ismert, hogy $|AM| : |MC| = 1 : m$, így $|AC| : |MC| = (1 + m) : m$ és $|AD| : |ME| = (1 + m) : m$.

$$\text{tehát } \frac{|AD|}{|ME|} = \frac{m+1}{m}.$$

Adott továbbá a $|BN| : |NC| = 1 : n$ arány, amiből következik, hogy $|BC| : |NC| = (1 + n) : n$



azaz $\frac{|BC|}{|NC|} = \frac{n+1}{n}$.

Most térjünk vissza a területekből kapott összefüggésre: $|BC| \cdot |AD| = 2 \cdot |NC| \cdot |ME|$, melyet átrendezve az alábbi egyenlőséget kapjuk: $\frac{|AD|}{|ME|} = 2 \frac{|NC|}{|BC|}$.

A megfelelő aránypárok behelyettesítésével pedig az $\frac{m+1}{m} = 2 \frac{n}{n+1}$ egyenlethez jutunk.

Hozzuk egyszerűbb alakra az egyenletet:

$$\begin{aligned}\frac{m+1}{m} &= 2 \frac{n}{n+1} \\ (1+n)(1+m) &= 2mn \\ 1+m+n+mn &= 2mn \\ mn-n-m &= 1 \\ mn-n-m+1 &= 2 \\ n(m-1)-(m-1) &= 2 \\ (m-1)(n-1) &= 2\end{aligned}$$

Mivel a feladat $m, n \in \mathbb{N}$ megoldásokat keres, így egy Diofantoszi egyenlethez jutottunk.

$$(m-1)(n-1) = 2 \cdot 1$$

Két lehetőségünk van:

$m-1 = 2$ és $n-1 = 1$, amiből következik, hogy $m = 3$ és $n = 2$ vagy

$m-1 = 1$ és $n-1 = 2$, amiből következik, hogy a $m = 2$ és $n = 3$ megoldaspárokat kapjuk.

Tehát a feladatnak két megoldása van: $m = 3, n = 2$ vagy $m = 2$ és $n = 3$.