



XXIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2025. december 7.

11. évfolyam

1. Mennyi megoldása van a $\sin 3x - \sin x + \cos 2x = 1$ egyenletnek a $[2, 24]$ intervallumban?

2. Ha $a + b + c = 0$ és $a^4 + b^4 + c^4 = 50$, mennyi az $ab + bc + ca$ értéke?

3. Az $ABC\Delta$ háromszög beírt körének középpontja legyen S , és legyen a D pont az A csúcsnál lévő belső szögfelező egyenes metszéspontja a szemközti BC oldallal. Ha adott $BD = 3$, $CD = 4$, $AD = 6$ szakaszok hossza, akkor mekkora az AS szakasz?

4. Legyenek $x = \frac{(1+i)^{2026}}{(1-i)^{2025}} \cdot (1-i)^{11}$, $y = 5^{-1} \cdot 3^{\log_9 625}$, $z = \frac{27 \arcsin \frac{1}{2}}{\arccos 0}$. Határozd meg az $n = xyz$ valódi osztóinak számát!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XXIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI – 11. évfolyam

1. Mennyi megoldása van a $\sin 3x - \sin x + \cos 2x = 1$ egyenletnek a $[2, 24]$ intervallumban?

Megoldás. Kezdőhelyzetben $\sin 3x - \sin x + \cos 2x = 1$, átalakítjuk:

$$\Rightarrow \sin 3x - \sin x = 1 - \cos 2x,$$

$$\Rightarrow 2 \cos 2x \cdot \sin x = 1 - \cos^2 x + \sin^2 x,$$

$$\Rightarrow 2 \cos 2x \cdot \sin x - 2 \sin^2 x = 0, \text{ elosztjuk kettővel és tényezőkre bontjuk:}$$

$$\Rightarrow \sin x \cdot (\cos 2x - \sin x) = 0,$$

$$\Rightarrow \sin x = 0 \quad \vee \quad (\cos 2x - \sin x) = 0$$

$$\Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ illetve } \cos^2 x - \sin^2 x - \sin x = 0$$

$$\Rightarrow 1 - 2 \sin^2 x - \sin x = 0$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = -1 \quad \vee \quad \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2m\pi, m \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}, \quad \vee \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi, l \in \mathbb{Z}$$

I: mivel $0 < 2 < \pi \wedge 7\pi < 24 < 8\pi$, ezért $1 \leq k \leq 7$, tehát 7 megoldás,

II: mivel $\frac{\pi}{6} < 2 < \frac{13\pi}{6} \wedge \frac{37}{6}\pi < 24 < \frac{49}{6}\pi$, ezért $1 \leq n \leq 3$, tehát 3 megoldás,

III: mivel $0 < 2 < \frac{5}{6}\pi \wedge \frac{41}{6}\pi < 24 < \frac{53}{6}\pi$, ezért $0 \leq l \leq 3$, tehát 4 megoldás,

IV: mivel $-\frac{\pi}{2} < 2 < \frac{3}{2}\pi \wedge \frac{15}{2}\pi < 24 < \frac{19}{2}\pi$, ezért $1 \leq m \leq 4$, tehát 4 megoldás.

Összesen 18 megoldás van az adott intervallumban.

2. Ha $a + b + c = 0$ és $a^4 + b^4 + c^4 = 50$, mennyi az $ab + bc + ca$ értéke?

Megoldás. Emeljük négyzetre a lineáris trinomot és a négyzeteik összegét:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 0$$

$$\text{Akkor } ab + ac + bc = -\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}, \text{ tehát negatív.}$$

$$a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 = 4(ab + ac + bc)^2$$

$$a^4 + b^4 + c^4 + 2 \cdot (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) = 4(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2a^2bc + 2ab^2c + 2abc^2)$$

$$\text{rendezve: } a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 = 8abc(a + b + c) = 0,$$

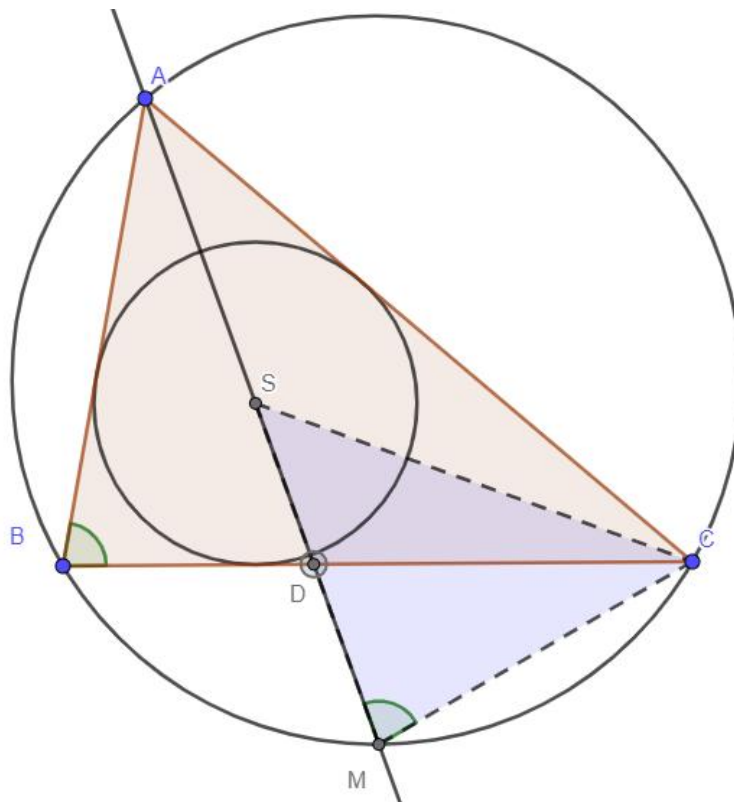
$$\text{tehát } a^4 + b^4 + c^4 = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 = 50, \text{ ahonnan } a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = 25.$$

$$\text{Ezért } a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 = 4(ab + ac + bc)^2 = 100.$$

$$\text{Innen } (ab + bc + ca)^2 = 25, \text{ vagyis a válasz } ab + bc + ca = -5.$$

3. Az $ABC\Delta$ háromszög beírt körének középpontja legyen S , és legyen a D pont az A csúsnál lévő belső szögfelező egyenes metszéspontja a szemközti BC oldallal. Ha adott $BD = 3$, $CD = 4$, $AD = 6$ szakaszok hossza, akkor mekkora az AS szakasz?

Megoldás. Legyen az M pont az AD szögfelezőjének metszete a körülírt körrel. Vizsgáljuk a hasonló háromszögeket:



I: $ABD\Delta \sim DCM\Delta$ SzSz tétel alapján, mert két belső szögük egybevágó, $ABC\angle \cong DMC\angle$ az AB húr feletti kerületi szögek, $ADB\angle \cong MDC\angle$ csúcsszögek.

Ebből a megfelelő oldalak aránya alapján $\frac{DA}{DC} = \frac{DB}{DM} \Rightarrow DM = \frac{DB \cdot DC}{DA} = \frac{3 \cdot 4}{6} = 2$

II: $BMC\Delta$ egyenlő szárú, akkor $MB \cong MC$.

III: $MSC\Delta$ egyenlő szárú, mert $MSC\angle \cong SCM\angle = \frac{ACB\angle + BAC\angle}{2}$, tehát $MC \cong MS$.

IV: $MCD\Delta \sim AMC\Delta$ a SzSz tétel alapján mert $DMC\angle$ közös szög és $MAC\angle \cong DCM\angle = \frac{BAC\angle}{2}$. Ebből a megfelelő oldalak aránya egyenlő:

$$\frac{DC}{AC} = \frac{DM}{CM} = \frac{CM}{AM} \Rightarrow CM^2 = AM \cdot DM = 2 \cdot (2 + 6) = 16 \Rightarrow CM = 4.$$

Tehát $MS = 4 \Rightarrow AS = AM - MS = (2 + 6) - 4 = 4$.

4. Legyenek $x = \frac{(1+i)^{2026}}{(1-i)^{2025}} \cdot (i-1)^{11}$, $y = 5^{-1} \cdot 3^{\log_9 625}$, $z = \frac{27 \arcsin \frac{1}{2}}{\arccos 0}$. Határozd meg az

$n = xyz$ valódi osztóinak számát!

Megoldás.

$$x = \frac{(1+i)^{2026}}{(1-i)^{2025}} \cdot (1-i)^{11} = \frac{(2i)^{1013}}{(-2i)^{1007}} = -2^6 i^6 = 2^6,$$

$$y = 5^{-1} \cdot 3^{\log_9 625} = \frac{1}{5} \cdot 3^{\frac{\log_3 5^4}{\log_3 9}} = \frac{1}{5} \cdot 3^{\frac{4 \log_3 5}{2}} = \frac{1}{5} \cdot (3^{\log_3 5})^2 = \frac{5^2}{5} = 5,$$

$$z = \frac{27 \arcsin \frac{1}{2}}{\arccos 0} = \frac{27 \cdot \frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{2}} = 9 = 3^2.$$

$$n = xyz = 2^6 \cdot 5 \cdot 3^2 \text{ valódi osztóinak száma } (6+1) \cdot (1+1) \cdot (2+1) = 42.$$