



XV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2017. december 2.

9. évfolyam

- 1. Egy társaság meghatározott számú tallért oszt szét egymás között. Az első kap 10 tallért, meg még a maradék tizedét. A második kap 20 tallért, és még az így megmaradt tallérok tizedét. A harmadik kap 30 tallért, és még az így megmaradt tallérok tizedét, és így tovább mindaddig, amíg el nem fogy az összes tallér. Ekkor kiderült, hogy mindenki ugyanannyi tallért kapott. Hány tagú a társaság?**
- 2. Határozd meg az összes (nem feltétlenül különböző) p , q és r prímszámot, amelyre $r - 1 < \frac{r}{p} + \frac{r}{q}$ teljesül!**
- 3. Az $ABCDEF$ hatszögre igaz, hogy minden szöge 120° -os. Az AB oldala 2 cm , a BC oldala 7 cm , a CD oldala 3 cm és a DE oldala 4 cm hosszú. Milyen hosszúak az EF , illetve FA oldalak?**
- 4. Egy 2017 oldalú szabályos sokszög átlói közül legkevesebb mennyit kell kiválasztanunk ahhoz, hogy minden előforduló hosszúságú átlóból biztosan legyen legalább egy?**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

MEGOLDÁSOK – 9. évfolyam

1. Egy társaság meghatározott számú tallért oszt szét egymás között. Az első kap 10 tallért, meg még a maradék tizedét. A második kap 20 tallért, és még az így megmaradt tallérok tizedét. A harmadik kap 30 tallért, és még az így megmaradt tallérok tizedét, és így tovább mindaddig, amíg el nem fogy az összes tallér. Ekkor kiderült, hogy mindenki ugyanannyi tallért kapott. Hány tagú a társaság?

Megoldás: A tallérok számát jelöljük x -szel. Az első személy ezek szerint

$10 + \frac{x-10}{10}$ tallért kapott, míg a második $20 + \frac{x-10 - \frac{x-10}{10} - 20}{10}$ tallért kapott. A feltételek szerint ez a két mennyiség egyenlő, vagyis az

$$10 + \frac{x-10}{10} = 20 + \frac{x-10 - \frac{x-10}{10} - 20}{10}$$

egyenlet megoldása adja a keresett számot: $x = 810$. Mivel mindenki egyformán 90 tallért kap, ezért a társaság kilenctagú.

Válasz: 9 tagú a társaság.

2. Határozd meg az összes (nem feltétlenül különböző) p , q és r prímszámot, amelyre $r-1 < \frac{r}{p} + \frac{r}{q}$ teljesül!

Megoldás: Az egyenlőtlenség mindkét oldalát r -rel osztva és átrendezve az $1 < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ alakú egyenlőtlenséget kapjuk. Ha a nevezőkben a legkisebb prímszám

nem kisebb háromnál, akkor a jobb oldal legfeljebb 1 lehet, és így nem teljesül az egyenlőtlenség, tehát a keresett prímszámok között van legalább egy 2-es. Ha pontosan egy 2-es van, akkor a következő számhármasok adódnak:

2;3;3 , 3;2;3 , 3;3;2 , továbbá

2;3;5 , 2;5;3 , 3;2;5 , 3;5;2 , 5;2;3 és 5;3;2 .

Amennyiben legalább két 2-es van, akkor a harmadik szám bármelyik prímszám lehet: 2;2; t , 2; t ;2 és t ;2;2 , ahol t tetszőleges prímszám.

Válasz: 2;3;3 , 3;2;3 , 3;3;2 , 2;3;5 , 2;5;3 , 3;2;5 , 3;5;2 , 5;2;3 , 5;3;2 , illetve 2;2; t , 2; t ;2 és t ;2;2 , ahol t tetszőleges prímszám.

3. Az $ABCDEF$ hatszögre igaz, hogy minden szöge 120° -os. Az AB oldala 2 cm , a BC oldala 7 cm , a CD oldala 3 cm és a DE oldala 4 cm hosszú. Milyen hosszúak az EF , illetve FA oldalak?

Megoldás: Hosszabbítsuk meg a hatszög BC , ED és FA oldalát. Az oldalegyenesek metszéspontját jelölje P , Q és R . (Lásd az ábrát!)

Mivel a hatszög külső szögei $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, így a hozzárajzolt kis háromszögek szabályosak, tehát a PQR háromszög is szabályos.

Tekintsük a PQ szakaszt:

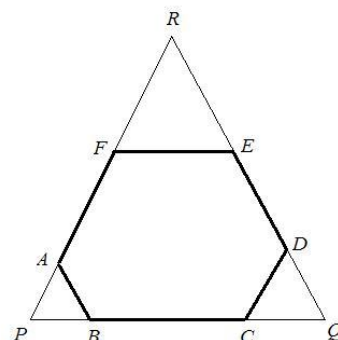
$$\begin{aligned} PQ &= PB + BC + CQ = AB + BC + CD = \\ &= 2 + 7 + 3 = 12\text{ cm} \end{aligned}$$

A PQR háromszög egyenlő oldalú volta miatt: $QR = RP = 12\text{ cm}$.

Ekkor $EF = ER = 12 - QD + DE = 12 - CD + DE = 12 - 3 - 4 = 5\text{ cm}$.

Hasonlóan kapjuk, hogy $FA = PR - AP + FR = PR - AB + EF = 12 - 2 - 5 = 5\text{ cm}$.

Válasz: Az EF , illetve FA oldalak hossza 5 cm .



4. Egy 2017 oldalú szabályos sokszög átlói közül legkevesebb mennyit kell kiválasztanunk ahhoz, hogy minden előforduló hosszúságú átlóból biztosan legyen legalább egy?

Megoldás: A sokszögeknek $\frac{2017 \cdot 2014}{2} = 2031119$ átlója van. Egy csúcsból 2014 átló

indul ki. Ezek $2014 : 2 = 1007$ -féle hosszúságúak. Mindegyik hosszúságúból $2031119 : 1007 = 2017$ darab van. Ha $1006 \cdot 2017$ -et kiválasztunk, az nyilván nem elég, mert lehet, hogy az egyik fajtából egyáltalán nem választottunk, az összes többiből meg az összeset. De ha $1006 \cdot 2017 + 1$ -et választunk, akkor az már biztosan elég lesz, mert ha valamelyik fajta hosszúságú átló hiányozna, akkor legfeljebb $1006 \cdot 2017$ darab átló lehetne kiválasztva.

Válasz: A keresett szám tehát: $1006 \cdot 2017 + 1 = 2029103$.