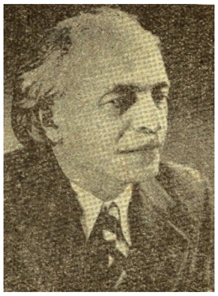


XIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2015. december 5.

8. évfolyam

1. Megkérdezték Furfangos Fannyt, mennyi a házszáma és ő így válaszolt:
„Ha a házszámom osztható 3-mal, akkor 50 és 59 között van.”
„Ha a házszámom nem osztható 4-gyel, akkor 60 és 69 között van.”
„Ha a házszámom nem osztható 6-tal, akkor 70 és 79 között van.”
Ezek alapján mennyi Furfangos Fanny házszáma?

2. Hány olyan nyolcjegyű páros szám van, amelynek minden számjegye 1-es vagy 4-es, és a páros számú helyeken álló számjegyek összege egyenlő a páratlan számú helyeken álló számjegyek összegével?

3. Fel lehet-e írni az 1, 2, 3,…, 9 számokat egy kör kerületére úgy, hogy bármelyik két szomszédos szám összegét számolva olyan számot kapjunk, amelyik nem osztható sem 3-mal, sem 5-tel, sem 7-tel?

4. Adott a $36\,cm^2$ területű $ABCD$ négyzet. Az AB oldal A csúcshoz közelebbi harmadolópontját nevezzük P-nek, a CD oldal C-hez közelebbi harmadolópontját pedig Q-nak. Az AC, DP, PC és QB szakaszok egy négyszöget határoznak meg. Mekkora ennek a négyszögnek a területe?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

MEGOLDÁSOK – <u>8. évfolyam</u>

1. Megkérdezték Furfangos Fannyt, mennyi a házszáma és ő így válaszolt:
„Ha a házszámom osztható 3-mal, akkor 50 és 59 között van.”
„Ha a házszámom nem osztható 4-gyel, akkor 60 és 69 között van.”
„Ha a házszámom nem osztható 6-tal, akkor 70 és 79 között van.”
Ezek alapján mennyi Furfangos Fanny házszáma?

Megoldás: Legyen k Furfangos Fanny házszáma. Ekkor,
a) ha k osztható 3-mal, akkor $50 \leq k \leq 59$, vagyis $k \in \{51, 54, 57\}$, de mivel ezek nem oszthatóak 4-gyel, akkor ellentmondásra jutunk, mert $k \leq 59$ és $k \geq 60$.
b) ha k nem osztható 3-mal, akkor nem osztható 6-tal sem, tehát $70 \leq k \leq 79$, és hasonlóan az előző esethez, a házszám osztható 4-gyel. Így az egyetlen lehetséges szám a 76, mert a 72 nem lehet, hiszen osztható 3-mal.

2. Hány olyan nyolcjegyű páros szám van, amelynek minden számjegye 1-es vagy 4-es, és a páros számú helyeken álló számjegyek összege egyenlő a páratlan számú helyeken álló számjegyek összegével?

Megoldás: A csupa 1-esekből álló szám páratlan. Az utolsó számjegy a 4-es (_ _ _ _ _ _ _ 4).
Mivel az utolsó helyen 4-es áll, ezért a páratlan helyeken is kell lennie négyesnek. Ha csak 1-eseket írnánk a páratlan helyekre, akkor nem lehetne egyenlő a két összeg.
Bontsuk fel a feladatot esetekre!
I. Két 4-est helyezünk el, a többi 1-es. A páros helyeken már elhelyeztük, a páratlan helyeken pedig négy közül választhatunk. Ez 4 számot jelent.
II. Négy 4-est helyezünk el (és négy 1-est). A három szabad páros helyre egy 4-est helyezünk el, ezt háromféleképpen tehetjük meg. A négy páratlan helyre két 4-est helyezünk el, ami hatféleképpen lehetséges. Ez összesen $3 \cdot 6 = 18$ számot jelent.
III. Hat 4-est és két 1-est helyezünk el. Ebben az esetben egyszerűbb az egyesek lehetséges elhelyezkedését számolni. Páros helyeken három lehetőségünk van, páratlan helyeken pedig négy. Összesen 12 szám.
IV. Végül, ha nyolc számegy 4-es, 1-es pedig nincs. Egy ilyen szám van.
Összesen $4 + 18 + 12 + 1 = 35$ l a feltételeknek megfelelő szám van.

3. Fel lehet-e írni az 1, 2, 3,…, 9 számokat egy kör kerületére úgy, hogy bármelyik két szomszédos szám összegét számolva olyan számot kapjunk, amelyik nem osztható sem 3-mal, sem 5-tel, sem 7-tel?

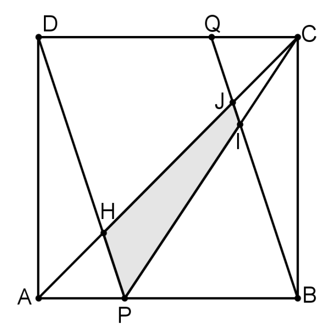
Megoldás: A számokat egy kör kerületére írva mindegyiknek két szomszédja lesz. A legkisebb összeg az 1 + 2 = 3, a legnagyobb a 8 + 9 = 17. Figyelembe véve, hogy két szomszédos szám összege nem szabad, hogy osztható legyen sem 3-mal, sem 5-tel, sem 7-tel, a lehetséges összegek: 4; 8; 11; 13; 16; 17: Ekkor az egyes számok szomszédai a következők lehetnek:

szám	1	2	3	4	5	6	7	8	9
lehetséges szomszéd	3; 7	6; 9	1; 5; 8	7; 9	3; 6; 8	2; 5; 7	1; 4; 6; 9	3; 5; 9	2; 4; 7; 8

Mivel az 1-esnek, a 4-esnek és a 2-esnek csak a 3-7; 7-9; 9-6 lehetnek a szomszédai, ezért a 3-1-7-4-9-2-6 csak ilyen (vagy fordított) sorrendben követhetik egymást. A még fel nem használt számok közül a 6-ost csak az 5-ös, azt pedig csak a 8-as követheti, aminek a 3-as lesz a másik szomszédja. A kapott felírás teljesíti a feltételeket, és mivel minden lépés egyértelmű volt, csak ez az egy megoldás van.

4. Adott a $36\,\text{cm}^2$ területű $ABCD$ négyzet. Az AB oldal A csúcshoz közelebbi harmadolópontját nevezzük P-nek, a CD oldal C-hez közelebbi harmadolópontját pedig Q-nak. Az AC, DP, PC *és* QB szakaszok egy négyszöget határoznak meg. Mekkora ennek a négyszögnek a területe?

Megoldás: Készítsünk ábrát, és jelöljük a négyszög csúcsait.



A négyzet oldala $6\,cm$ hosszú. Figyeljük meg a hasonló háromszögeket! $APH\Delta \sim DHC\Delta$, mert a megfelelő szögeik egybevágóak (csúcsszögek, illetve váltószögek). Mivel a háromszögek hasonlóságának aránya $1:3$, ezért a párhuzamos alapokra húzott magasságaik aránya is $1:3$. Innen az $APH\Delta$ AP alapra húzott magassága $\frac{3}{2}\,\text{cm}$, valamint

$$T_{APH\Delta} = \frac{2\cdot\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{2}\,\text{cm}^2.$$

Hasonlóan a $PBI\Delta \sim ICQ\Delta$, a hasonlóság aránya $2:1$. Innen a $PBI\Delta$ PB alapjára húzott magassága $4\,cm.$, a területe pedig : $T_{PBI\Delta} = \frac{4\cdot 4}{2} = 8\,\text{cm}^2$.

Végül az $ABJ\Delta \sim JCQ\Delta$, a hasonlóság aránya $3:1$. Az $ABJ\Delta$ magassága $\frac{9}{2}\,\text{cm}$, területe:

$$T_{ABJ\Delta} = \frac{6\cdot\frac{9}{2}}{2} = \frac{27}{2}\,\text{cm}^2.$$

A kapott területekből kiszámítható, hogy: $T_{PIJH} = T_{ABJ\Delta} - (T_{APH\Delta} + T_{PBI\Delta}) = \frac{27}{2} - \frac{3}{2} - 8 = 4\,\text{cm}^2$.