XXI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2023. december 2.

11. évfolyam

1. Bizonyítsd be, hogy a $2019 \cdot 2021 \cdot 2023 \cdot 2025 + 16$ **szám teljes négyzet!**

2. Adott az M **pont az** $ABCD$ **trapéz** AD **szárán. Igazold, hogy az** N **pont, amely az** $ABM_\triangle$ **és** $CDM_\triangle$ **háromszögek körülírt körének második metszéspontja, illeszkedik a** BC **oldalhoz!**

3. Oldd meg a következő egyenletet: $\dfrac{\sin x - \sqrt{\sin x}}{\cos x - \sqrt{\cos x}} = 1$.

4. Az idén, 2023**-ban Baltazár professzort felhívta az egykori matematikatanára, Mikó bácsi, és az egészségi állapotára panaszkodott. Kissé udvariatlanul, Baltazár megkérdezte, hogy hány éves Mikó bácsi. Erre a következőt válaszolta: „Ha azt az évszámot, amikor** 43 **éves voltam, beszorzom azzal az évszámmal, amikor** 45 **éves voltam, majd elosztom a születési évszámmal, akkor megkapom azt az évszámot, amelyben…" Itt megszakadt a vonal és Baltazár nem tudta újrahívni. Ám az adatokból ki tudta számolni Mikó bácsi születési évét. Vajon hány éves most Mikó bácsi?**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XXI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI – 11. évfolyam

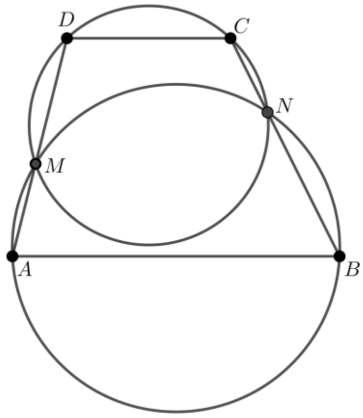
1. Bizonyítsd be, hogy a $2019\cdot 2021\cdot 2023\cdot 2025+16$ szám teljes négyzet!

Megoldás. $2019\cdot 2021\cdot 2023\cdot 2025+16=(2022-3)\cdot(2022-1)\cdot(2022+1)\cdot(2022+3)+16=$

$=(2022^2-1)\cdot(2022^2-3^2)+16=(2022^2-1)\cdot(2022^2-9)+16==2022^4-10\cdot 2022^2+9+16=$

$2022^4-10\cdot 2022^2+25=\left(2022^2-5\right)^2$.

2. Adott az M pont az $ABCD$ trapéz AD szárán. Igazold, hogy az N pont, amely az $ABM_\triangle$ és $CDM_\triangle$ háromszögek körülírt körének második metszéspontja, illeszkedik a BC oldalhoz!



Megoldás. Legyen az N pont a vizsgált körök második metszéspontja, azt kell igazolni, hogy $BNM\measuredangle+CNM\measuredangle=180°$. Mivel az $BNMA$ és $NCDM$ húrnégyszögek, ezért

$BNM\measuredangle+CNM\measuredangle=\left(180°-BAM\measuredangle\right)+\left(180°-CDM\measuredangle\right)=$

$=360°-\left(BAM\measuredangle+CDM\measuredangle\right)=360°-180°=180°$,

amit igazolni kellett.

3. Oldd meg a következő egyenletet: $\dfrac{\sin x-\sqrt{\sin x}}{\cos x-\sqrt{\cos x}}=1$.

Megoldás. Feltételek: $\sin x\ge 0,\ \cos x\ge 0,\ \ \cos x-\sqrt{\cos x}\ne 0$

akkor $\dfrac{\sin x-\sqrt{\sin x}}{\cos x-\sqrt{\cos x}}=1\quad\Rightarrow \sin x-\sqrt{\sin x}=\cos x-\sqrt{\cos x}$

$\Rightarrow \sin x-\cos x=\sqrt{\sin x}-\sqrt{\cos x}$

$\Rightarrow (\sqrt{\sin x}-\sqrt{\cos x})\cdot\left(\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}\right)=\sqrt{\sin x}-\sqrt{\cos x}$

$\Rightarrow \sqrt{\sin x}-\sqrt{\cos x}=0$ vagy $\left(\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}\right)=1$.

Ha $\sqrt{\sin x}-\sqrt{\cos x}=0\Rightarrow \sin x=\cos x\Rightarrow\ x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$,

ha $\left(\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}\right)=1\Rightarrow\ \ \sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}-1=0$ *és* $0<\sqrt{\sin x}<1,\ \ 0<\sqrt{\cos x}<1$

valamint $\cos x\ne 0,\ \ \cos x\ne 1,\ \sin x\ne 0,\ \ \sin x\ne 1$,

akkor $\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}>\left(\sqrt{\sin x}\right)^4+\left(\sqrt{\cos x}\right)^4=1$, ami ellentmondáshoz vezet.

Tehát a megoldás a feltételek miatt $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$.

4. Az idén, 2023-ban Baltazár professzort felhívta az egykori matematikatanára, Mikó bácsi, és az egészségi állapotára panaszkodott. Kissé udvariatlanul, Baltazár megkérdezte, hogy hány éves Mikó bácsi. Erre a következőt válaszolta: „Ha azt az évszámot, amikor 43 éves voltam, beszorzom azzal az évszámmal, amikor 45 éves voltam, majd elosztom a születési évszámmal, akkor megkapom azt az évszámot, amelyben…" Itt megszakadt a vonal és Baltazár nem tudta újrahívni. Ám az adatokból ki tudta számolni Mikó bácsi születési évét. Vajon hány éves most Mikó bácsi?

Megoldás. Legyen x a tanár születési évszáma, akkor $\frac{(x+43)\cdot(x+45)}{x}=\frac{x^2+88x+1935}{x}=x+88+\frac{1935}{x}$ egész szám, csak $x=1935$ lehet, mert a következő legnagyobb osztója 645, ami nem lehet születési év. Tehát Mikó bácsi 1935-ben született és az idén, 2023-ban 88 éves.