XXII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2024. december 8.

<u>12. évfolyam</u>

1. Egy hagyományos 8×8-as sakktáblán elhelyeztünk 33 futót. Bizonyítsd be, hogy mindig el tudunk közülük távolítani 28 futót úgy, hogy a megmaradt 5 futó ne üsse egymást. (A futó átlósan közlekedik.)

2. Jelölje $s(n)$ az n természetes szám számjegyeinek szorzatát. Határozd meg azokat az n természetes számokat, amelyre $s(n)=n^2-10n-22$.

3. Határozd meg, melyek azok a szabályos n-szögek, amelyek feldarabolhatóak konvex ötszögekre!

4. Egy prímszámot abszolút prímszámnak nevezünk, ha a számjegyeinek bármely permutációja esetén prímszámot kapunk. Bizonyítsd be, hogy minden abszolút prímszám legfeljebb három különböző számjegyet tartalmaz!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XXII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI – 12. évfolyam

1. Egy hagyományos 8×8-as sakktáblán elhelyeztünk 33 futót. Bizonyítsd be, hogy mindig el tudunk közülük távolítani 28 futót úgy, hogy a megmaradt 5 futó ne üsse egymást. (A futó átlósan közlekedik.)

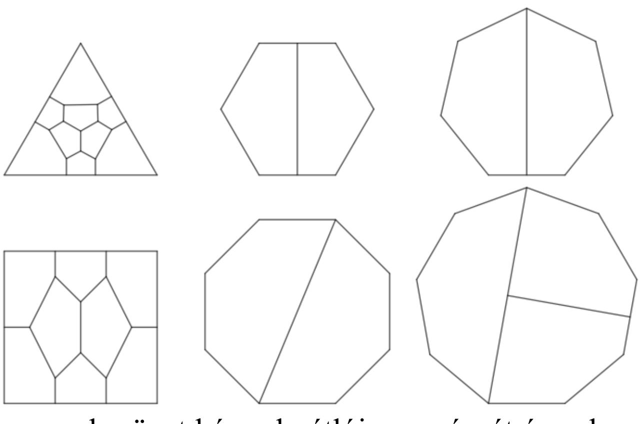
Megoldás. A sakktáblának 8 sora van. Mivel 33 futót helyeztünk el a táblán, a skatulyaelv értelmében léteznie kell olyan sornak amelyben legalább 5 futó van. Eltávolítunk minden más sorban levő futót, valamint, ha az adott sorban több mint 5 futó volt, akkor a felesleget onnan is eltávolítjuk. Az egy sorban elhelyezkedő futók soha nem ütik egymást.

2. Jelölje $s(n)$ az n természetes szám számjegyeinek szorzatát. Határozd meg azokat az n természetes számokat, amelyre $s(n)=n^2-10n-22$.

Megoldás. Mivel az $n^2-10n-22$ másodfokú függvénynek két nullahelye van, amelyek közül az egyik negatív, a másik pedig egy 11 és 12 közötti szám, megállapíthatjuk, hogy $n\geq12$. Ugyanakkor, mivel minden n természetes számra teljesül, hogy $s(n)\leq n$, megállapíthatjuk, hogy $n^2-10n-22\leq n$, azaz $n^2-11n-22\leq0$. Innen következik viszont, hogy $n\leq12$. Azaz, az egyedüli lehetséges megoldás az $n=12$, amelyre valóban teljesülnek a feladat feltételei.

3. Határozd meg, melyek azok a szabályos n-szögek, amelyek feldarabolhatóak konvex ötszögekre!

Megoldás. Bármely szabályos n-szög feldarabolható konvex ötszögekre. Az alábbi ábrákon látható, hogy hogyan darabolható fel a szabályos háromszög, a négyzet, valamint a szabályos n-szög, $n=6,7,8,9$ esetén. Az ötszög értelemszerűen feldarabolható.



Ismeretes, hogy a konvex sokszöget bármely átlója, a csúcsát és valamely oldal belső pontját összekötő szakasz, valamint két oldal belső pontját összekötő szakasz mindig két konvex sokszögre bontja. Az előző ábrán látható a hatszög, hétszög és nyolcszög felbontása. Az ezt követő n-szögek esetén úgy járunk el, hogy sorban lemetszünk konvex ötszögeket az eredeti alakzat „széléről”, ezt addig folytatva, még nem kapunk konvex hatszöget, hétszöget vagy nyolcszöget. Mindig ez a három eset valamelyikéhez jutunk vissza, mert egy n-szögből egy ötszöget lemetszve marad egy $(n-3)$-szög.

4. Egy prímszámot abszolút prímszámnak nevezünk, ha a számjegyeinek bármely permutációja esetén prímszámot kapunk. Bizonyítsd be, hogy minden abszolút prímszám legfeljebb három különböző számjegyet tartalmaz!

Megoldás. Értelemszerűen a $0,2,4,5,6,8$ számjegyek nem lehetnek számjegyei egy többszámjegyű abszolút prímszának. Tehát minden többszámjegyű abszolút prímszám csak a $1,3,7,9$ számjegyeket tartalmazhatja. Tegyük fel, hogy egy abszolút prímszám tartalmazza ezt a négy számjegyet. Permutáljuk meg a számokat úgy, hogy ez a négy számjegy a szám végére kerüljön. Ez a szám akkor felírható $10^4x+1379$ alakban. Figyeljük most a következő számokat:

$$10^4x+1379, 10^4x+1397, 10^4x+1739, 10^4x+1793, 10^4x+1937, 10^4x+1973, 10^4x+3719.$$

Ezek a számok is mind megkaphatók a számjegyek permutációjával, viszont ez a hét szám 7-tel osztva mind különböző maradékot ad, tehát közülük valamelyik biztosan osztható 7-tel. Ezzel ellentmondásra jutottunk.