

XXI. Fekete Mihály Emlékverseny

Első levelező forduló

12. évfolyam

1. Határozd meg az összes olyan háromjegyű természetes számot, amelyek egyenlőek a számjegyeik faktoriálisának összegével!

2. Legyen az M pont az $ABCD$ négyszög AB oldalának felezőpontja, valamint CMD szög derékszög. Bizonyítsd be, hogy $CD \leq AD + BC$.

3. Legyen $p(x)$ egy egész együtthatós d -fokú polinom.

a) Ha a és b olyan egész számok, amelyekre $p(a) = 1$ és $p(b) = -1$, akkor bizonyítsd be, hogy $|a - b| \leq 2$.

b) Legyen $q(x) = (p(x))^2 - 1$. Bizonyítsd be, hogy a $q(x)$ polinomnak legfeljebb $d + 2$ különböző gyöke van!

4. Legyen n pozitív egész és tekintsünk egy $(2n+1) \times (2n+1)$ -es táblát, melynek néhány mezője fekete, a többi pedig fehér. Egy lépésben kiválasztunk egy tetszőleges sort vagy oszlopot, és az összes mezőjét arra a színűre festjük, amelyik szín eddig többségben volt az adott sorban/oszlopban. A kiindulási színezést fehéríthetőnek, illetve feketíthetőnek nevezzük, ha belőle véges sok, alkalmasan választott lépéssel elérhető, hogy az egész tábla fehér, illetve fekete legyen.

a) Bizonyítsd be, hogy minden színezés fehéríthető vagy feketíthető!

b) Bizonyítsd be, hogy minden n esetén létezik olyan színezés, amely fehéríthető és feketíthető is!

c) Adott n esetén mi a legkisebb olyan k , hogy minden pontosan k fekete mezőt tartalmazó színezés feketíthető?

Sikeres munkát kívánunk!

Az első levelező fordulóban a megoldások beküldésének határideje: **2023. október 13.**

Minden feladatot maximum 25 ponttal értékelünk. A megoldásokat részletesen kell indokolni!

A feladatok megoldásait A4-es formátumú lapon kérjük beadni. Nem szükséges minden feladatot új lapon kezdeni, viszont minden beadott lapon fel kell tüntetni a nevet és az évfolyamot. A feladatmegoldásokat tartalmazó lapokat egy dupla A4-es formátumú borítólapba kell beletenni. A borítólapra kérjük ráírni a következő adatokat: a versenyző neve, évfolyama, e-mail címe, telefonszáma, iskolájának neve és székhelye, a felkészítő tanár neve, telefonszáma és e-mail címe.

A megadott versenyzői és tanári e-mail címre minden forduló után el fogjuk küldeni a versenyző adott fordulóban elért pontszámát.

Minden további értesítés megtalálható lesz az **Ingenium Alapítvány** honlapján: <http://ingenium.rs/> illetve a **Bolyai Gimnázium honlapján** <http://www.bolyai-zenta.edu.rs>

Postacím: Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium
L e v e l e z ő v e r s e n y
24400 Zenta, Posta utca 18.