



XX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2022. december 3.

6. évfolyam

1. Mikulás bácsi egy doboz cukorkát kapott névnapjára, melynek egy ötödét fel is falta már első nap. Második nap megette a megmaradt rész felét és megkínálta két kedvenc kismanóját, akik fejenként két-két szemet vettek el. Ekkor a dobozban maradt még 12 szem cukorka. Mennyi cukorka volt eredetileg a dobozban, és mennyit evett meg a Mikulás az első napon?

2. Niki és Misi azon tanakodnak, hogy ha egy téglalapba berajzolják a téglalap egyik átlóját, valamint az átló egy belső pontján át párhuzamost húznak az oldalakkal (lásd ábra), akkor a két sátirozott rész területe egyenlő lesz. Segíts bebizonyítani nekik ezt az állítást!



3. Az iskolai karácsonyfadíszítés után a karácsonyi gömbökből 700 gömb kimaradt. Misi eldöntötte, hogy épít belőle egy 12 rétegű gömbpiramist. A piramis a következő jellemzőkkel rendelkezik: alapja négyzet alakú, a gömbök egyforma méretűek, az építés során négy gömb tetejére egy gömböt teszünk, a legfelső réteg egyetlen gömbből áll. Elég lesz-e Misinek és barátainak a megmaradt 700 gömb egy 12 szintes piramis felépítésére? Tudnának-e esetleg nagyobb piramist építeni?

4. Misi születésnapjára egy marcipánbevonatú meglepetéstortát kapott barátaitól, melynek mérete $16\text{cm} \times 16\text{cm} \times 16\text{cm}$. Fel tudja-e osztani 16 egybevágó (egyforma) téglalattal 8 vágással (síkkal) a tortát? Amennyiben sikerül Misinek ilyen módon feldarabolni a tortát rajzold le a kis szelet (téglalattal) testhálóját, határozd meg az éleinek hosszát, végül határozd meg mennyi a térfogata egy ilyen szeletnek! A kapott téglalattal között nem teszünk különbséget a díszítés miatt.

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI – 6. évfolyam

1. Mikulás bácsi egy doboz cukorkát kapott névnapjára, melynek egy ötödét fel is falta már első nap. Második nap megette a megmaradt rész felét és megkínálta két kedvenc kismanóját, akik fejenként két-két szemet vettek el. Ekkor a dobozban maradt még 12 szem cukorka. Mennyi cukorka volt eredetileg a dobozban, és mennyit evett meg a Mikulás az első napon?

Megoldás. Jelöljük a cukorkák számát x -szel.

- Első napon megette a cukorkák egy ötödét, azaz $\frac{x}{5}$ -öt.
- Második napon a maradék felét, azaz $\frac{1}{2} \cdot \frac{4x}{5} = \frac{2x}{5}$ részét.
- Adott a manóknak 4 szemet.
- Maradt 12 szem.

A fenti megállapításokból felírható a következő egyenlet:

$$\frac{x}{5} + \frac{2x}{5} + 4 + 12 = x.$$

Az egyenletet rendezve a következőket kapjuk:

$$\frac{3x}{5} + 16 = x$$

$$16 = \frac{2x}{5}$$

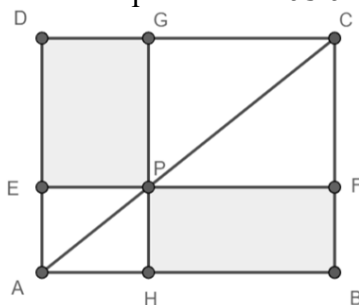
$$x = 40.$$

Tehát 40 cukorka volt a dobozban, és ebből a Mikulás az első napon 8 darabot evett meg.

2. Niki és Misi azon tanakodnak, hogy ha egy téglalapba berajzolják a téglalap egyik átlóját, valamint egy az átló egy belső pontján át párhuzamost húznak az oldalakkal (lásd ábra), akkor a két sátirozott rész területe egyenlő lesz. Segíts bebizonyítani nekik ezt az állítást!



Megoldás. Először is nevezzük el a fontos pontokat az ábránkon.



Egy téglalap átlója két egybevágó háromszögre osztja fel a a négyszöget, az így kapott háromszögek területe pedig megegyezik.

Az $ABCD$ téglalap esetén $ABC\Delta \cong ACD\Delta$, ezért $T_{ABC\Delta} = T_{ACD\Delta} = t$.

Az $AHPE$ téglalap esetén $AHP\Delta \cong APE\Delta$, ezért $T_{AHP\Delta} = T_{APE\Delta} = t_1$.

Az $PFCG$ téglalap esetén $PCF\Delta \cong PCG\Delta$, ezért $T_{PCF\Delta} = T_{PCG\Delta} = t_2$.

Valamint azt is tudjuk, hogy

$T_{ABCA} = T_{AHP\Delta} + T_{PFC\Delta} + T_{HBFP}$, ahonnan: $T_{HBFP} = T_{ABCA} - T_{AHP\Delta} - T_{PFC\Delta} = t - t_1 - t_2$.

$T_{ACDA} = T_{APE\Delta} + T_{PCG\Delta} + T_{EPGD}$, ahonnan: $T_{EPGD} = T_{ACDA} - T_{APE\Delta} - T_{PCG\Delta} = t - t_1 - t_2$.

Tehát a két satírozott rész területe megegyezik egymással.

3. Az iskolai karácsonyfadíszítés után a karácsonyi gömbökből 700 gömb kimaradt. Misi eldöntötte, hogy épít belőle egy 12 rétegű gömbpiramist. A piramis a következő jellemzőkkel rendelkezik: alapja négyzet alakú, a gömbök egyforma méretűek, az építés során négy gömb tetejére egy gömböt teszünk, a legfelső réteg egyetlen gömbből áll. Elég lesz-e Misinek és barátainak a megmaradt 700 gömb egy 12 szintes piramis felépítésére? Tudnának-e esetleg nagyobb piramist építeni?

Megoldás. A legfelső, azaz a 12. réteg 1 gömböt tartalmaz, mely alatt a 11. rétegben 4 gömb található. Ha megvizsgáljuk a 11. réteget oldalnézetből, akkor 2 gömböt látunk, így a képzeletbeli négyzet oldala 2 gömbnyi, területe pedig 4 gömbnyi. A következő rétegben, azaz a 10.-ben oldalról nézve a piramist, a 2 gömb alá 3 gömb kerül, és mivel négyzet alapú, így a rétegben felhasznált gömbök száma 9 lesz. Hasonlóan gondolkodhatunk a további rétegek esetén is. Visszafelé haladva minden réteg „oldala” egy gömbbel növekszik, megállapíthatjuk, hogy lényegében az n . réteg elkészítéséhez $(12-n+1)^2$ gömb szükséges. Nézzük meg rétegenként:

réteg	gömb darabszám
12.	1
11.	$2^2 = 4$
10.	$3^2 = 9$
9.	$4^2 = 16$
8.	$5^2 = 25$
7.	$6^2 = 36$
6.	$7^2 = 49$
5.	$8^2 = 64$
4.	$9^2 = 81$
3.	$10^2 = 100$
2.	$11^2 = 121$
1.	$12^2 = 144$

Miután kiszámoltuk, hogy egy adott réteg hány darab gömböt tartalmaz össze kell adnunk a rétegekben található gömbök számát, azaz, az első 12 szám négyzetösszegét, ami nem más, mint $144+121+100+81+64+49+36+25+16+9+4+1=650$ gömb. Nagyobb piramist már nem tudnának építeni, mivel ahhoz még $169-50$, azaz 119 gömb kellene.

4. Misi születésnapjára egy marcipánbevonatú meglepetéstortát kapott barátaitól, melynek mérete $16\text{cm} \times 16\text{cm} \times 16\text{cm}$. Fel tudja-e osztani 16 egybevágó (egyforma) téglatestre 8 vágással (síkkal) a tortát? Amennyiben sikerül Misinek ilyen módon feldarabolni a tortát rajzold le a kis szelet (téglatest) testhálóját, határozd meg az éleinek hosszát, végül határozd meg mennyi a térfogata egy ilyen szeletnek! A kapott téglatestek között nem teszünk különbséget a díszítés miatt.

Megoldás. Szimbolizáljuk a vágásokat egy-egy síkkal. Gondoljuk át, hogyan kaphatunk 16 darab egybevágó téglatestet. Ha csupa párhuzamos síkkal szeretnénk feldarabolni egybevágó részekre a tortát, akkor 15 darab síkra volna szükségünk, ami egyrészt páratlan szám, másrészt több, mint amennyi sík a rendelkezésünkre áll. Ahhoz, hogy páros számú síkkal páros számú egybevágó darabokra osszuk fel a tortát, legalább egy sík merőleges kell, hogy legyen a többi síkra, s ez a sík meg fogja duplázni a párhuzamos síkok által meghatározott egybevágó szeletek számát.

Tehát $\frac{16}{2}$ azaz 8 egybevágó szeletet kell létrehoznunk $8-1=7$ sík segítségével.

A 7 sík pontosan 8 egybevágó szeletre tudja osztani a tortát, melyet ha egy olyan merőleges síkkal vágunk el, mely a torta mélységének felénél halad át, akkor megkaphatjuk a 16 darab egybevágó szeletet, tehát Misi el tudja osztani igazságosan a tortát.

Egy ilyen szelet, ami egy téglatest kiterített hálóját a következőképpen néz ki:

Dimenziói: $2\text{cm} \times 8\text{cm} \times 16\text{cm}$.

Térfogata: $V = abc = 2 \cdot 8 \cdot 16 = 256\text{cm}^3$.

