



XV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

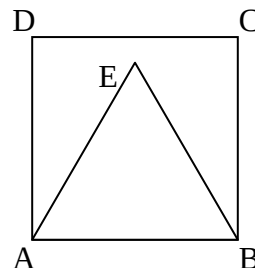
Zenta, 2017. december 2.

7. évfolyam

1. Egy digitális óra kijelzője négy számjeggyel jelzi az időt 00:00-tól 23:59-ig. Misi azt mondta az anyukájának, hogy ő csak akkor használja az okos telefonját, ha az órán látható legalább egy 4-es számjegy. Mennyi időt tölt Misi telefonhasználattal naponta, ha minden nap 22:30-tól másnap reggel 6:30-ig alszik, a többi időben pedig valóban betartja ezt a szabályt?

2. Hány olyan pozitív egész szám van, amelynek minden számjegye különböző és a számjegyeinek a szorzata 48?

3. Az $ABCD$ négyzet belső tartományába egy egyenlő oldalú ABE háromszöget rajzoltunk, az ábra szerint.



a) Hány fokos az ECD szög?

b) Hányad része a BEC háromszög területe az $ABCD$ négyzet területének?

Írd le részletesen a megoldás indoklását!

4. Hívjuk R-törtnek azokat a törteket, amelyeknek a számlálója 1. Egyes R-törtek felírhatóak két másik R-tört különbségeként.

a) Írd fel az $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ és $\frac{1}{20}$ R-törteket két R-tört különbségeként!

b) Az előző ötlet felhasználásával számítsd ki a következő összeget:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8}.$$

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

MEGOLDÁSOK – 7. évfolyam

1. Egy digitális óra kijelzője négy számjeggyel jelzi az időt 00:00-tól 23:59-ig. Misi azt mondta az anyukájának, hogy ő csak akkor használja az okos telefonját, ha az órán látható legalább egy 4-es számjegy. Mennyi időt tölt Misi telefonhasználattal naponta, ha minden nap 22:30-tól másnap reggel 6:30-ig alszik, a többi időben pedig valóban betartja ezt a szabályt?

Megoldás:

Minden teljes órában 15 perc van, amikor Misi használja az okostelefonját.

Például 7:00 és 7:59 között a megfelelő 1 perc hosszúságú időpontok: 7:04, 7:14, 7:24, 7:34, 7:40, 7:41, 7:42, 7:43, 7:44, 7:45, 7:46, 7:47, 7:48, 7:49, 7:54.

Kivételt képez a 14:00 és a 14:59 közötti időszak, amikor minden percben használja a telefonját, tehát 60 percig.

6:30 és 6:59 között csak 3 megfelelő időpont van.

22:00 és 22:30 között 12 perc felel meg a feltételnek.

Az ébrenlét időszaka:

6:31 - 6:59	3 perc
7:00 – 13:59	$7 \cdot 15 = 105$ perc
14:00 – 14:59	60 perc
15:00 – 21:59	$7 \cdot 15 = 105$ perc
22:00 – 22:29	<u>12 perc</u>
Összesen	$285 \text{ perc} = 4 \text{ óra } 45 \text{ perc}$

Válasz: Misi naponta 4 óra 45 percet használja a telefonját.

2. Hány olyan pozitív egész szám van, amelynek minden számjegye különböző és a számjegyeinek a szorzata 48?

Megoldás: A 48 prímtényezőkre bontott alakja: $2^4 \cdot 3$. Ezekből a tényezőkből háromféle szorzat képezhető úgy, hogy különböző számjegyek a tényezők:

$6 \cdot 8$, $6 \cdot 2 \cdot 4$, $8 \cdot 2 \cdot 3$,

viszont a feladat feltételeinek megfelelnek azok a szorzatok is, amiket kibővítünk még egy 1-es szorzóval:

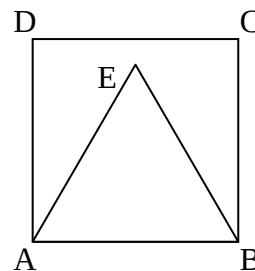
$6 \cdot 8 \cdot 1$, $6 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1$, $8 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1$

A feladat feltételeinek egyetlen egyjegyű szám sem felel meg.

Kétjegyűek:	$6 \cdot 8 \rightarrow$	68, 86	2 db
Háromjegyűek:	$6 \cdot 2 \cdot 4 \rightarrow$	264, 246, 462, 426, 624, 642	6 db
	$8 \cdot 2 \cdot 3 \rightarrow$		6 db
	$6 \cdot 8 \cdot 1 \rightarrow$		6 db
Négyjegyűek:	$6 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1 \rightarrow$		24 db
	$8 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \rightarrow$		<u>24 db</u>
			68 db

Válasz: Összesen 68 olyan pozitív egész szám van, ami megfelel a feladat feltételeinek.

3. Az $ABCD$ négyzet belső tartományába egy egyenlő oldalú ABE háromszöget rajzoltunk, az ábra szerint.



a) Hány fokos az ECD szög?

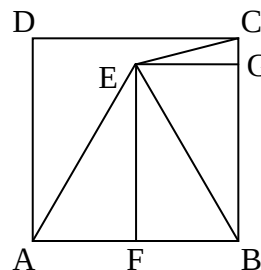
b) Hányad része a BEC háromszög területe az $ABCD$ négyzet területének?

Írd le részletesen a megoldás indoklását!

Megoldás:

a) Mivel az ABE háromszög szabályos, minden belső szöge 60° -os. Ezért $EBC\angle = 30^\circ$. Az $EBC\Delta$ egyenlőszárú, ezért $BEC\angle = BCE\angle = 75^\circ$. Mivel $BCE\angle + ECD\angle = 90^\circ$, ezért könnyen kiszámítható, hogy a keresett szög 15° -os.

Válasz: $ECD\angle = 15^\circ$.



b) Jelöljük a négyzet és a háromszög oldalainak hosszát is a -val! Legyenek F és G rendre az E pontból az AB és BC oldalra bocsátott merőlegesek talppontjai. Az $EFBG$ négyszög téglalap, ezért a szembenfekvő oldalai egyenlő hosszúak: $EG = FB$.

Az EF merőleges valójában az ABE egyenlőszárú háromszög magassága is, ezért felezi az AB oldalt. Innen tudjuk, hogy $FB = \frac{a}{2} = EG$. Mivel EG a BCE háromszög BC oldalhoz tartozó magassága, a BEC háromszög területe:

$$T_{BEC\Delta} = \frac{a \cdot \frac{a}{2}}{2} = \frac{a^2}{4}.$$

Mivel az $ABCD$ négyzet területe a^2 , könnyen belátható, hogy a BEC háromszög területe az $ABCD$ négyszög területének a negyedrésze.

Válasz: A BEC háromszög területe az $ABCD$ négyszög területének a negyedrésze.

4. Hívjuk R-törtnek az egységszámlálójú törteket, vagyis azokat a törteket, amelyeknek a számlálója 1. Egyes R-törtek felírhatóak két másik R-tört különbségeként.

a) Írd fel az $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ és $\frac{1}{20}$ R-törteket két R-tört különbségeként!

b) Az előző ötlet felhasználásával számítsd ki a következő összeget:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8}.$$

Megoldás:

a) $\frac{1}{2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{20} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}.$

b)
$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8} = \\ & = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8} \right) = \\ & = \frac{1}{1} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{5} \right) + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right) + \left(-\frac{1}{7} + \frac{1}{7} \right) + \left(-\frac{1}{8} \right) = \\ & = \frac{1}{1} - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}. \end{aligned}$$