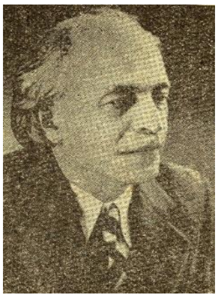


XX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2022. december 3.

12. évfolyam

1. Határozd meg azokat a prímszámokat, amelyekre teljesül, hogy a köbükhez egyet hozzáadva egy szám természetes szám négyzetét kapjuk!

2. Legyen a T pont az ABC háromszög köré írható körének egy tetszőleges pontja. Legyenek T_a, T_b, T_c pontok rendre a T pont tengelyes tükrözéssel kapott képei a BC, AC, AB egyenesekhez viszonyítva. Bizonyítsd be, hogy a T_a, T_b, T_c pontok kollineárisak!

3. Bizonyítsd be, hogy minden x, y, z pozitív valós számra teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$xy^2z^3 + yz^2x^3 + zx^2y^3 \le x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3.$$

4. Hányféleképpen tölthető ki egy 2022×2023-as táblázat 1 és -1 számokkal úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban a számok szorzata 1 legyen?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

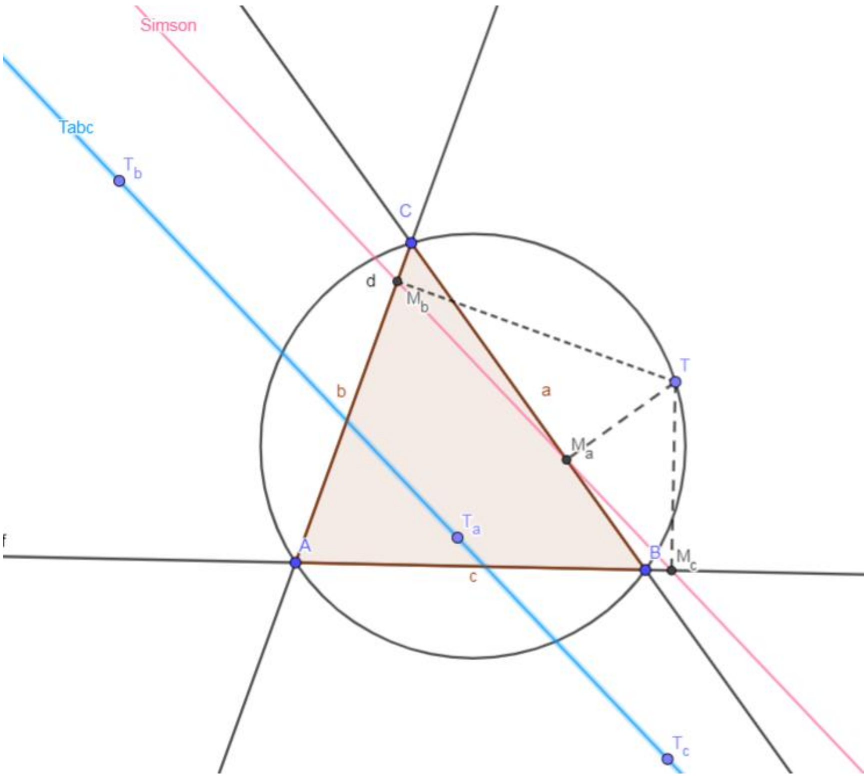
XX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI – 12. évfolyam

1. Határozd meg azokat a prímszámokat, amelyekre teljesül, hogy a köbükhez egyet hozzáadva egy szám természetes szám négyzetét kapjuk!

Megoldás. Legyen a keresett prímszám p, a keresett négyzetszám pedig n^2. Ekkor felírható, hogy: $p^3+1=n^2$, ahonnan ekvivalens átalakításokkal adódnak a következők: $p^3=n^2-1$, ahonnan $p^3=(n-1)(n+1)$. Innen két eset lehetséges. Vagy $n-1=1$ és $n+1=p^3$, ahonnan nem kapunk megoldást, vagy pedig $n-1=p$, és $n+1=p^2$, ahonnan $p^2-p=2$, amelynek egyedüli megoldása a $p=2$ prímszám.

2. Legyen a T pont az ABC háromszög köré írható körének egy tetszőleges pontja. Legyenek T_a,T_b,T_c pontok rendre a T pont tengelyes tükrözéssel kapott képei a BC,AC,AB egyenesekhez viszonyítva. Bizonyítsd be, hogy a T_a,T_b,T_c pontok kollineárisak!

Megoldás. Legyenek M_a,M_b,M_c pontok rendre a T pont merőleges vetületei a BC,AC,AB egyenesekre. Ezek a pontok kollineárisak (Simson-egyenes). Vegyük észre, hogy a T_a,T_b,T_c pontok rendre az M_a,M_b,M_c pontok $H_{T,2}$ homotéciával kapott képei, emiatt kollineárisak.



3. Bizonyítsd be, hogy minden x, y, z pozitív valós számra teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$xy^2z^3 + yz^2x^3 + zx^2y^3 \le x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3 .$$

Megoldás. A számtani és a mértani közepekre fennálló egyenlőtlenségekből következnek a következő egyenlőtlenségek:

$$\begin{aligned} x^3y^3 + x^3y^3 + x^3z^3 &\ge 3\sqrt[3]{x^3y^3x^3y^3x^3z^3} = 3x^3y^2z, \\ y^3z^3 + y^3z^3 + y^3x^3 &\ge 3\sqrt[3]{y^3z^3y^3z^3y^3x^3} = 3y^3z^2x, \\ z^3x^3 + z^3x^3 + z^3y^3 &\ge 3\sqrt[3]{z^3x^3z^3x^3z^3y^3} = 3z^3x^2y. \end{aligned}$$

Ezeket az egyenlőtlenségeket összeadva majd mindkét oldalt 3-mal elosztva pontosan a kívánt egyenlőtlenséget kapjuk meg.

4. Hányféleképpen tölthető ki egy 2022×2023-as táblázat 1 és -1 számokkal úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban a számok szorzata 1 legyen?

Megoldás. A bal felső 2021×2022-es téglalapot kitöltjük tetszőlegesen. Ezt összesen $2^{2021 \cdot 2022}$-féleképp tehetjük meg. Jelölje A ezeknek a számoknak a szorzatát. Megmutatjuk, hogy ez a válasz a keresett kérdésre. A résztéglalap kitöltése után az utolsó oszlop első 2021 mezőjében, valamint az utolsó sor első 2022 mezőjében egyértelmű, melyik számnak kell szerepelnie ahhoz, hogy kiegészítse a megfelelő szorzatokat 1-re. Jelöljük az ezekben a részekben található számok szorzatát rendre B-vel és C-vel. Egyedüli kérdés, hogy kitölthetjük-e ellentmondásmentesen téglalap jobb alsó mezőjét. Jelöljük az ebben a mezőben található számot D-vel. Tudjuk, hogy $AB = AC = 1$, ahonnan $B = C$, vagyis a D mező mindig ellentmondásmentesen kitölthető. A keresett válasz tehát $2^{2021 \cdot 2022}$.