

XX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2022. december 3.

11. évfolyam

1. Oldd meg az $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = 2\sqrt{2}$ egyenletet!

2. Az ABC derékszögű háromszögben a két befogó összege $4\sqrt{10}$, az átfogóra húzott magassága 3. Határozd meg a háromszög oldalainak hosszát!

3. Három prímszám szorzata az összegük ötszörösével egyenlő. Add meg az összes lehetséges megoldást!

4. Mivel egyenlő az $S = f\left(\frac{1}{2022}\right) + f\left(\frac{2}{2022}\right) + \dots + f\left(\frac{2021}{2022}\right) + f(1)$ összeg, ha

$$f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2} ?$$

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI – 11. évfolyam

1. Oldd meg az $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = 2\sqrt{2}$ egyenletet!

Megoldás. Kezdőhelyzetben az egyenlet mindkét oldalát szorozzuk be $\sin x \cdot \cos x$ -szel, majd emeljük négyzetre, akkor $\sin^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = 8 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$.

Ezt rendezve $2 \sin^2 2x - \sin 2x - 1 = 0$.

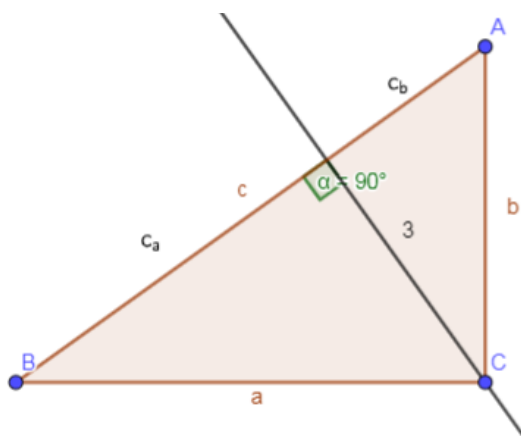
Az eredeti egyenletünk megoldásai a kapott egyenletnek is megoldásai. Az utóbbi egyenletből adódik, hogy $\sin 2x = 1 \vee \sin 2x = -\frac{1}{2}$, ahonnan pedig

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{7\pi}{12} + k\pi, \frac{11\pi}{12} + k\pi, \text{ ahol } k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Az eredeti egyenletet csak az $x \in \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{11\pi}{12} + 2k\pi, \frac{19\pi}{12} + 2k\pi, \text{ ahol } k \in \mathbb{Z} \right\}$ gyökök elégítik ki.

2. Az ABC derékszögű háromszögben a két befogó összege $4\sqrt{10}$, az átfogóra húzott magassága 3. Határozd meg a háromszög oldalainak hosszát!

Megoldás. Euklideszi-tétel szerint a magasság az átfogón lévő metszetek geometriai közepe, vagyis $c_a \cdot c_b = 9$, $c \cdot c_a = a^2$, $c \cdot c_b = b^2$. Mivel $a + b = 4\sqrt{10}$, akkor négyzetre emelve $a^2 + 2ab + b^2 = 160$, behelyettesítés után $a^2 \cdot b^2 = c^2 \cdot c_a \cdot c_b = 9c^2$, ezért a befogók szorzata $3c$. Most a Pitagorasz-tétel szerint $a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2 \cdot 3c = 160$, azaz $c^2 + 6c - 160 = 0$ egyenlet két gyöke 10 és -16, ebből csak a $c = 10$ elfogadható, tehát az átfogó 10, a befogók szorzata 30 és összege $4\sqrt{10}$, akkor, ez utóbbi gyökei a háromszög befogói $a = \sqrt{10}$ és $b = 3\sqrt{10}$ (szimmetrikus).



3. Három prímszám szorzata az összegük ötszörösével egyenlő. Add meg az összes lehetséges megoldást!

Megoldás. Jelölje x , y és z a három prímszámot, a feladat feltételei alapján $xyz = 5 \cdot (x + y + z)$, ezért x , y és z közül valamelyik egyenlő öttel, legyen ez $x = 5$. Tehát $yz = 5 + y + z$. Ezt kielégítő y és z értékre fennáll, hogy $y - 1 = \frac{6}{z - 1}$ és $z \neq 1$. Ezek alapján z lehetséges értékei 2, 3, 4, 7, az y lehetséges értékei 7, 4, 3, 2, és ebben nem lehet a 4. A válasz tehát 2, 5 és 7.

4. Mivel egyenlő az $S = f\left(\frac{1}{2022}\right) + f\left(\frac{2}{2022}\right) + \dots + f\left(\frac{2021}{2022}\right) + f(1)$ összeg, ha

$$f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2} ?$$

Megoldás. Vegyük észre, hogy $f(1-x) = 1 - f(x)$.

$$\text{Innen } f(x) + f(1-x) = \frac{4^x}{4^x + 2} + \left(1 - \frac{4^x}{4^x + 2}\right) = 1,$$

$$\text{ezért } S = 1010 + f\left(\frac{1011}{2022}\right) + f(1) = 1010 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = 1011\frac{1}{6}.$$