



XX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2022. december 3.

10. évfolyam

1. Bizonyítsd be, hogy az $n = 99...900...025$ szám, amelyben k darab 0 és 9 számjegy szerepel, minden k természetes szám esetén négyzetszám!
2. Oldd meg a következő egyenletet a prímszámok halmazán: $2x + 3y + 6z = 78$.
3. Bizonyítsd be, hogy abban a derékszögű háromszögben, amelynek egyik hegyesszöge 15° -os, az átfogóhoz tartozó magasság az átfogó negyedével egyenlő. Számítsd ki a háromszög területét az átfogó függvényében!
4. A táblán a következő hiányos egyenlet áll $x^3 + ...x^2 + ...x + ... = 0$. Két játékos felváltva ír a kipontozott helyekre valós számokat együtthatónak. Az első játékos célja:
 - a) olyan egyenletet kapni, amelynek pontosan egy valós gyöke van,
 - b) olyan egyenletet kapni, amelynek három, nem feltétlenül különböző, valós gyöke van.Megakadályozhatja-e ebben az első játékost a második játékos külön az a) és külön a b) esetben?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI – 10. évfolyam

1. Bizonyítsd be, hogy az $n = 99\dots900\dots025$ szám, amelyben k darab 0 és 9 számjegy szerepel, minden k természetes szám esetén négyzetszám!

Megoldás. Vegyük észre hogy, ha $k = 1$, akkor $n = 9025 = 95^2 = (10^2 - 5)^2$. Ha $k = 2$, akkor $n = 990025 = 995^2 = (10^3 - 5)^2$. Könnyen belátható, hogy minden esetben $n = (10^{k+1} - 5)^2$.

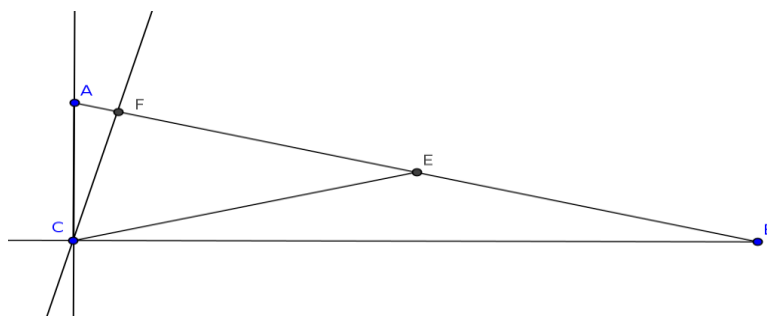
2. Oldd meg a következő egyenletet a prímszámok halmazán: $2x + 3y + 6z = 78$.

Megoldás. Rendezzük át az egyenletet a következő alakba: $2x = 3(26 - y - 2z)$. Mivel az egyenlet jobb oldala osztható 3-mal, ezért a bal oldal is osztható, ahonnan $x = 3$. Ebből következik, hogy $y + 2z = 24$. Innen azonnal látszik, hogy y páros szám, azaz az egyedüli lehetőség $y = 2$. Végezetül pedig $z = 11$. Tehát az egyedüli megoldás az $(x, y, z) = (3, 2, 11)$.

3. Bizonyítsd be, hogy abban a derékszögű háromszögben, amelynek egyik hegyesszöge 15° -os, az átfogóhoz tartozó magasság az átfogó negyedével egyenlő. Számítsd ki a háromszög területét az átfogó függvényében!

Megoldás. Legyen az ABC derékszögű háromszög B csúcsnál levő szöge 15° -os, a C csúcsnál levő szöge pedig 90° -os. Legyen az F pont a C pontból az átfogóra bocsátott merőleges talppontja, az E pont pedig az átfogó felezőpontja. Ennek alapján a CE az átfogó fele, azaz $\frac{c}{2}$, de ez egyidőben a CFE derékszögű háromszög átfogója, amely félszabályos, mert a CFE szöge 30° -os, amiből az következik, hogy $CF = \frac{CE}{2} = \frac{c}{4}$.

Így az ABC háromszög területe pedig $\frac{c^2}{8}$.



4. A táblán a következő hiányos egyenlet áll $x^3 + \dots x^2 + \dots x + \dots = 0$. Két játékos felváltva ír a kipontozott helyekre valós számokat együtthatónak. Az első játékos célja:

a) olyan egyenletet kapni, amelynek pontosan egy valós gyöke van,

b) olyan egyenletet kapni, amelynek három, nem feltétlenül különböző, valós gyöke van.
Megakadályozhatja-e ebben az első játékost a második játékos külön az a) és külön a b) esetben?

Megoldás. a) $x^3 + \dots x^2 + \dots x + \dots = 0$. Írjunk fel egy olyan harmadfokú egyenletet, melynek pontosan egy valós gyöke van. Például $(x+a)(x^2+1)=0$, azaz $x^3+ax^2+x+a=0$, így az első játékos az x együtthatóját 1-nek választja. Ezután bármit ír a második játékos bármelyik helyre, az első játékos beírja ugyanezt a számot a fennmaradó helyre, ezzel biztosítva magának a nyertes stratégiát.

b) Az első játékos 0-t ír a konstans helyére. Ekkor a következő alak marad: $x(x^2+ax+b)=0$. Ha a második játékos az a helyére ír valamit, akkor az első játékos a b helyére 0-t (vagy bármely negatív számot) ír. Ha a második játékos a b helyére ír valamit, akkor az első játékos a -t megválaszthatja úgy, hogy $a^2 \geq 4b$ (vagy az a helyére $-(b+1)$ -et ír).