XVIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2021. január 29.

<u>10. évfolyam</u>

1. **Határozzuk meg azokat a természetes számokat, amelyek négyzetének a végződése ugyanaz a kétjegyű szám, mint magának az eredeti számnak?**

2. Hány megoldása van az egyenletrendszernek a valós számnégyesek halmazában és melyek ezek?

$$x^2+y^2+z^2+t^2=50,$$
$$x^2-y^2+z^2-t^2=-40,$$
$$xy-zt=0,$$
$$x-y+z+t=0.$$

3. Az $ABCD$ négyzet AB oldala felett kifelé félkört szerkesztünk. Ezen a félkörön melyik az a P pont, amelyre az AP^2+CP^2 a lehető legnagyobb és mennyi a maximum értéke?

4. A táblára felírunk 2019 **nullát,** 2020 **egyest és** 2021 **kettes számjegyet. Minden alkalommal két különböző számjegyet törlünk és helyettük a** 0, 1, 2 **számjegy közül azt az egy számjegyet írjuk, amely abban a lépésben nem került letörlésre.**
a) Bizonyos lépés után maradhat-e csupa nulla sorozat?
b) Amikor a táblán csak egy számjegy maradt, akkor melyik számjegyek lehetnek azok?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XVIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI – 10. évfolyam

1. Határozzuk meg azokat a természetes számokat, amelyek négyzetének a végződése ugyanaz a kétjegyű szám, mint magának az eredeti számnak?

Megoldás: Ha a feltételek teljesülnek, akkor $100 \mid \left(a^2-a\right)$ azaz $a\cdot(a-1)=100k=4\cdot 25\cdot k$. Mivel $(a,a-1)=1$, ezért $25 \mid a$ és $4 \mid (a-1)$, vagy $25 \mid (a-1)$ és $4 \mid a$, vagy $100 \mid a$, illetve $100 \mid (a-1)$.

Az első esetben az a szám végződése 00, 25, 50 vagy 75 lehet, de ezek közül csak a 25-tel végződőek felelnek meg.
A második esetben az $a-1$ szám végződése 00, 25, 50 vagy 75 lehet, de ezekből csak azok felelnek meg, amikor $a-1$ 75-re végződik, azaz az a szám végződése 76.
A harmadik esetben a 00 végződőek felelnek meg.
A negyedik esetben a 01-re végződőek felelnek meg.

2. Hány megoldása van az egyenletrendszernek a valós számnégyesek halmazában és melyek ezek?

$$x^2+y^2+z^2+t^2=50,$$
$$x^2-y^2+z^2-t^2=-40,$$
$$xy-zt=0,$$
$$x-y+z+t=0.$$

Megoldás: Az utolsó két egyenlet alapján két eset lehetséges $xy=zt=0$ vagy $xy=zt\neq 0$.
Az első esetben $x=0$ vagy $y=0$ és $z=0$ vagy $t=0$ lehetséges, de ez az első egyenletet nem elégíti ki. Így tehát csak a második esetre kaphatunk megoldást azaz $xy=zt\neq 0$, vagyis $\frac{x}{t}=\frac{z}{y}$, vagyis $t=kx$ és $y=kz$, ahol k nem 0 valós szám. Az egyenletrendszer pedig

$$\begin{aligned} &x^2+k^2z^2+z^2+k^2x^2=50, & & \left(1+k^2\right)\left(x^2+z^2\right)=50,\\ &x^2-k^2z^2+z^2-k^2x^2=-40, & \text{tehát } & \left(1-k^2\right)\left(x^2+z^2\right)=-40,\\ &x-kz+z+kx=0, & & (1+k)x+(1-k)z=0. \end{aligned}$$

A második és első egyenlet hányadosa $\frac{1-k^2}{1+k^2}=-\frac{4}{5}$ és ebből $k=-3$ vagy $k=3$. Ha $k=3$, akkor $z=2x$, $t=3x$, $y=3z=6x$ és ezeket az első egyenletbe helyettesítve adódik, hogy $x^2=1$. Hasonlóan, ha $k=-3$, akkor $z=\frac{x}{2}$, $t=-3x$, $y=-3z=-\frac{3}{2}x$ és ezeket az első egyenletbe helyettesítve adódik, hogy $x^2=4$. A megoldáshalmaz így négy számnégyest tartalmaz és ezek a következők:

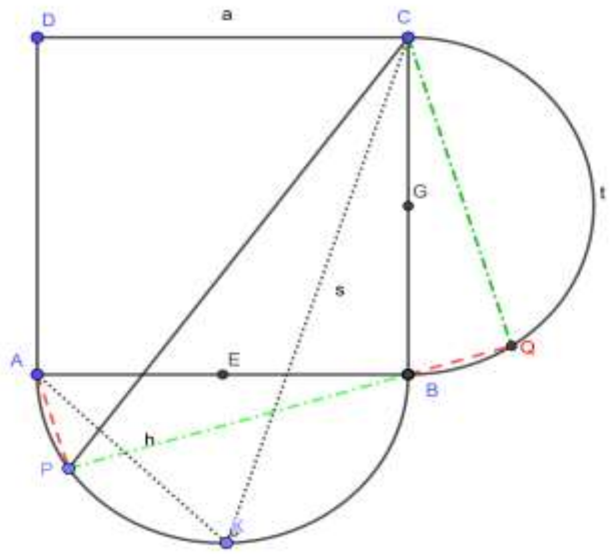
(1, 6, 2, 3) , (-1, -6, -2, -3), (2, -3 ,1, -6), (-2, 3, -1, 6).

3. Az $ABCD$ négyzet AB oldala felett kifelé félkört szerkesztünk. Ezen a félkörön melyik az a P pont, amelyre az AP^2+CP^2 a lehető legnagyobb és mennyi a maximum értéke?

Megoldás: A négyzet oldala legyen a hosszúságú és szerkesszünk a BC oldal felett is félkört. Az AB átmérőjű félkör ívén felveszünk egy tetszőleges P pontot és összekötjük a B ponttal. Ez az egyenes Q pontban metszi a BC átmérőjű ívet. Mivel a BQC szög derékszög és $AP = BQ = x$, valamint $BP = CQ = y$, ezért $PC^2 = (x+y)^2 + y^2 = x^2 + 2y^2 + 2xy$.

Ennek alapján adódik, hogy $AP^2 + PC^2 = 2\left(x^2 + y^2 + xy\right) = 2\left(a^2 + xy\right)$.

Mivel $x^2 + y^2 = a^2$ konstans, az xy szorzat pedig akkor maximális ha egyenlők a tényezők, azaz $x = y = \frac{a}{\sqrt{2}}$, vagyis a P pont az AB ív felezőpontja, ezért $AP^2 + PC^2$ maximális értéke $3a^2$.



4. A táblára felírunk 2019 **nullát,** 2020 **egyest és** 2021 **kettes számjegyet. Minden alkalommal két különböző számjegyet törölünk és helyettük a** 0, 1, 2 **számjegy közül azt az egy számjegyet írjuk, amely abban a lépésben nem került letörlésre.**
a) Bizonyos lépés után maradhat-e csupa nulla sorozat?
b) Amikor a táblán csak egy számjegy maradt, akkor melyik számjegyek lehetnek azok?

Megoldás: Legyen $a_0 = 2019$, $b_0 = 2020$, $c_0 = 2021$. Az a_n, b_n, c_n jelölik rendre az *n*-edik lépés utáni 0, 1, illetve 2 –es számjegyek számát és ezek minden lépésben változnak. A kezdő adatok alapján a 0 és a 2-esek száma azonos paritásúak és az egyesek számának paritása pedig nem egyezik meg ezzel.

a) Feltételezzük, hogy *n* lépés után csak nullák maradtak a táblán, azaz $b_n = 0 = c_n$, de ez az előbbi paritás vizsgálattal ellentmondó.

b) Ha az *n* lépés után egy számjegy maradt a táblán, akkor az a_n, b_n, c_n közül kettő nulla és ezek tehát azonos paritásúak, így a $b_n = 1$, tehát az 1 számjegy maradt a táblán.