

## **XI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY**

**Zenta, 2013. november 30.**

### **11. évfolyam**

- 1. Az  $ABC$  háromszög  $BC$  oldalán  $O$  egy olyan kör középpontja, amely az  $AB$  oldalt  $N$  pontban,  $AC$  oldalt  $M$  pontban érinti. Bizonyítsd be, hogy a  $BM$ , a  $CN$  és az  $ABC$  háromszög  $A$  csúcsához tartozó magasságvonala egy közös pontban metszik egymást!**
- 2. Legyenek az  $\alpha, \beta, \gamma$  olyan szögek, hogy  $\beta = \alpha + 60^\circ$ ,  $\gamma = \beta + 60^\circ$ . Igazold, hogy a  $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \gamma \cdot \operatorname{tg} \alpha$  kifejezés értéke egész szám!**
- 3. Igazold, hogy  $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2014} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2014}$  pozitív egész szám, és add meg a szám utolsó számjegyét!**
- 4. Oldd meg a valós számok halmazán az  $x^{\log_2 3} + 3^{\log_2 \sqrt{x}} = 12$  egyenletet!**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

***Jó munkát!***

## MEGOLDÁSOK – 11. évfolyam

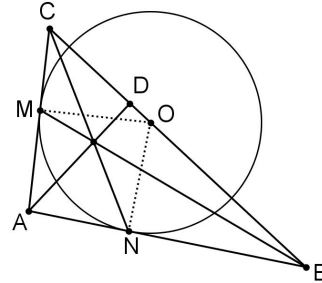
**1. Az  $ABC$  háromszög  $BC$  oldalán  $O$  egy olyan kör középpontja, amely az  $AB$  oldalt  $N$  pontban,  $AC$  oldalt  $M$  pontban érinti. Bizonyítsd be, hogy a  $BM$ , a  $CN$  és az  $ABC$  háromszög  $A$  csúcsához tartozó magasságvonal egy közös pontban metszik egymást!**

**Megoldás:** Legyen  $AD$  az  $ABC$  háromszög  $A$  csúcsához tartozó magasságvonala. Igazolni kell, hogy  $BM, CN, AD$  egyenesek egy pontban metszik egymást. Felhasználjuk a Ceva-tételt, az oldalakon keletkezett szakaszok arányát keressük:

$\frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MA}}$ , ha ez 1, akkor bebizonyítottuk. Mivel a  $BON$  és  $BAD$  derékszögű háromszögnek van egy közös hegyesszögük, akkor ezek hasonló háromszögek,  $BON\Delta \sim BAD\Delta$ , tehát oldalaik arányosak  $\frac{\overline{BD}}{\overline{NB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{NO}}$ , ugyanígy  $ADC\Delta \sim OMC\Delta$ ,

ahonnan  $\frac{\overline{CM}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{AD}}$ . A kör sugarai egybevágóak, azaz  $|OM| \cong |ON|$  és a körre húzott érintőszakaszok is, tehát  $|AN| \cong |AM|$ . Ezeket behelyettesítve adódik, hogy

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{NO}} \cdot \frac{\overline{OM}}{\overline{AD}} = 1.$$



**2. Legyenek az  $\alpha, \beta, \gamma$  olyan szögek, hogy  $\beta = \alpha + 60^\circ$ ,  $\gamma = \beta + 60^\circ$ . Igazold, hogy a  $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma \cdot \operatorname{tg}\alpha$  kifejezés értéke egész szám!**

**Megoldás:** Legyen  $\operatorname{tg}\alpha = t$ . Ekkor

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha + 60^\circ) = \frac{t + \sqrt{3}}{1 - t\sqrt{3}} \text{ és } \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(\alpha + 120^\circ) = \frac{t - \sqrt{3}}{1 + t\sqrt{3}},$$

ezért behelyettesítve

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma \cdot \operatorname{tg}\alpha &= \\ &= t \cdot \frac{t + \sqrt{3}}{1 - t\sqrt{3}} + \frac{t + \sqrt{3}}{1 - t\sqrt{3}} \cdot \frac{t - \sqrt{3}}{1 + t\sqrt{3}} + \frac{t - \sqrt{3}}{1 + t\sqrt{3}} \cdot t = \frac{t^2 + t\sqrt{3}}{1 - t\sqrt{3}} + \frac{t^2 - 3}{1 - 3t^2} + \frac{t^2 - t\sqrt{3}}{1 + t\sqrt{3}} = \\ &= \frac{(1 + t\sqrt{3}) \cdot (t^2 + t\sqrt{3}) + t^2 - 3 + (1 - t\sqrt{3}) \cdot (t^2 - t\sqrt{3})}{1 - 3t^2} = \\ &= \frac{t^2 + t^3\sqrt{3} + t\sqrt{3} + 3t^2 + t^2 - 3 + t^2 - t^3\sqrt{3} - t\sqrt{3} + 3t^2}{1 - 3t^2} = \\ &= \frac{9t^2 - 3}{1 - 3t^2} = \frac{3 \cdot (3t^2 - 1)}{1 - 3t^2} = -3 \end{aligned}$$

**3. Igazold, hogy  $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2014} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2014}$  pozitív egész szám, és add meg a szám utolsó számjegyét!**

**Megoldás:** Vizsgáljuk meg az  $a_n = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2n} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2n}$  kifejezést. Ekkor

$$\begin{aligned} a_0 &= 2, \quad a_1 = 10, \quad a_n = (5 + 2\sqrt{6})^n + (5 - 2\sqrt{6})^n \\ a_{n+1} &= (5 + 2\sqrt{6})(5 + 2\sqrt{6})^n + (5 - 2\sqrt{6})(5 - 2\sqrt{6})^n = 5 \cdot a_n + 2\sqrt{6} \left( (5 + 2\sqrt{6})^n - (5 - 2\sqrt{6})^n \right) \\ a_{n+2} &= (49 + 20\sqrt{6})(5 + 2\sqrt{6})^n + (49 - 20\sqrt{6})(5 - 2\sqrt{6})^n = \\ &= 49 \cdot a_n + 20\sqrt{6} \cdot \left( (5 + 2\sqrt{6})^n - (5 - 2\sqrt{6})^n \right) = 50 \cdot a_n + 20\sqrt{6} \cdot \left( (5 + 2\sqrt{6})^n - (5 - 2\sqrt{6})^n \right) - a_n = \\ &= 10 \cdot a_{n+1} - a_n \\ a_2 &= 98, \quad a_3 = 970, \quad a_4 = 9602, \quad \dots \end{aligned}$$

A rekurziós képlet szerint a sorozat minden tagja egész szám, tehát  $a_{1007}$  is egész szám, az utolsó számjegy négyes periódussal ismétlődik, 2, 0, 8, 0, 2, 0, 8, 0, ....

Ezért  $a_{1007}$  utolsó számjegye 0 lesz.

**4. Oldd meg a valós számok halmazán az  $x^{\log_2 3} + 3^{\log_2 \sqrt{x}} = 12$  egyenletet!**

**Megoldás:** Ha  $x > 0$ , pozitív, akkor mindegyik logaritmus és hatvány értelmezett. Mivel

$$3^{\log_2 \sqrt{x}} = 3^{\frac{1}{2} \log_2 x} = \sqrt{3^{\log_2 x}},$$

valamint

$$\log_2 x^{\log_2 3} = \log_2 3 \cdot \log_2 x = \log_2 3^{\log_2 x},$$

érvényes, innen következik  $x^{\log_2 3} = 3^{\log_2 x}$ .

Ennek alapján, ha bevezetjük a  $t = \sqrt{3^{\log_2 x}}$  helyettesítést, akkor a  $t^2 + t - 12 = 0$  egyenlet megoldásait keressük, amelyek  $t_1 = -4 < 0$  és  $t_2 = 3$ .

A negatív megoldást nem vesszük figyelembe, így  $\sqrt{3^{\log_2 x}} = 3$  következik, vagyis

$$3^{\log_2 x} = 9,$$

amelyből

$$\log_2 x = 2,$$

a megoldás pedig  $x = 4$ .