

XI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2013. november 30.

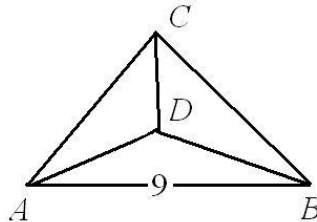
7. évfolyam

1. Amikor iskolánk 2000 méteres futóversenyének győztese átszakítja a célszalagot, Mari 200 méterrel, Bözsi 290 méterrel van mögötte. Ha mindkét lány eddigi átlagsebességének megfelelő egyenletes sebességgel fut tovább, akkor Mari célba érkezésekor hány méterrel lesz mögötte Bözsi?

2. Az ABC háromszög B csúcsánál lévő szög 121° -os, míg a C csúcsánál lévő szög 31° -os. Az A csúcsból bocsássunk merőlegest a BC oldalegyenesre, és az így kapott metszéspontot nevezzük T -nek. Az A csúcsnál lévő belső szög szögfelezője a BC oldalt a D pontban metszi. Mutassuk meg, hogy $|AT| = |TD|$.

3. Egy négyfordulós matematikaverseny első fordulójából a tanulók 25%-a, a második fordulóból a versenyben maradt tanulók egyharmada, a döntőbe pedig ezek fele jutott tovább. Ha az első fordulóból a versenyzők egyharmada, onnan tovább a 25%-uk, majd a döntőbe ezek fele jutott volna be, akkor a verseny folyamán 24 dolgozattal kellett volna többet javítani. Hány tanuló indult a versenyen?

4. Az A , B , C és D pontokat az ábrán látható módon vonalakkal kötöttük össze, majd mind a négy pontot és mind a 6 vonalat a következő számokkal jelöltük: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 és 11 (a 10-est kihagytuk). Mindegyik számot pontosan egyszer használtuk fel. Bármelyik két pontban levő számok összege egyenlő az adott két pontot összekötő vonalon levő számmal. Az AB vonalon a 9-es szám van (lásd az ábrát). Melyik számmal van jelölve a CD vonal?



A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

MEGOLDÁSOK – 7. évfolyam

1. Amikor iskolánk 2000 méteres futóversenyének győztese átszakítja a célszalagot, Mari 200 méterrel, Bözsi 290 méterrel van mögötte. Ha mindkét lány eddigi átlagsebességének megfelelő egyenletes sebességgel fut tovább, akkor Mari célba érkezésekor hány méterrel lesz mögötte Bözsi?

Megoldás:

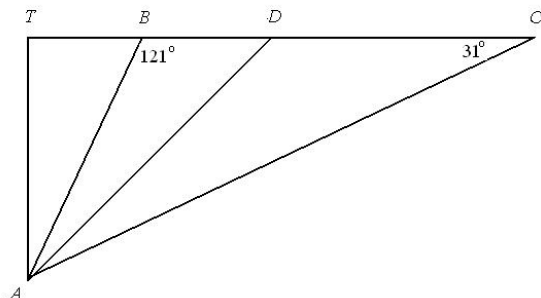
A győztes célba érkezésének pillanatában amíg Mari 1800 métert tett meg, addig Bözsi 1710 métert. Mennyit tesz meg Bözsi, mire Mari célba ér? Egyenes arányossággal megkapjuk a választ:

$$1800 : 1710 = 2000 : x,$$

ahonnan $x = 1900$, azaz Bözsi 100 méterrel lesz lemaradva.

2. Az ABC háromszög B csúcsánál lévő szög 121° -os, míg a C csúcsánál lévő szög 31° -os. Az A csúcsból bocsássunk merőlegest a BC oldalegyenesre, és az így kapott metszéspontot nevezzük T -nek. Az A csúcsnál lévő belső szög szögfelezője a BC oldalt a D pontban metszi. Mutassuk meg, hogy $|AT| = |TD|$.

Megoldás: Az állítás bizonyításához elég megmutatni, hogy $\angle ADT = 45^\circ$, mert akkor az ADT derékszögű háromszög egyenlő szárú, amiből következik az állítás.



Az ABC háromszög belső szögeinek összege 180° , így a

$$\angle BAC = 180^\circ - 121^\circ - 31^\circ = 28^\circ.$$

Mivel AD szögfelező, így $\angle DAB = 14^\circ$. A belső szögek összege miatt az ADB háromszögben az

$$\angle ADB = 180^\circ - 121^\circ - 14^\circ = 45^\circ,$$

és ebből következik az állítás, hogy $\angle ADT = 45^\circ$, azaz $|AT| = |TD|$.

3. Egy négyfordulós matematikaverseny első fordulójából a tanulók 25%-a, a második fordulóból a versenyben maradt tanulók egyharmada, a döntőbe pedig ezek fele jutott tovább. Ha az első fordulóból a versenyzők egyharmada, onnan tovább a 25%-uk, majd a döntőbe ezek fele jutott volna be, akkor a verseny folyamán 24 dolgozattal kellett volna többet javítani. Hány tanuló indult a versenyen?

Megoldás: Legyen a versenyzők száma n . Készítsünk táblázatot!

Forduló	Versenyzők száma I eset	Versenyzők száma II eset
1.	n	n
2.	$\frac{n}{4}$	$\frac{n}{3}$
3.	$\frac{n}{4} \cdot \frac{1}{3}$	$\frac{n}{3} \cdot \frac{1}{4}$
4.	$\frac{n}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$	$\frac{n}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$

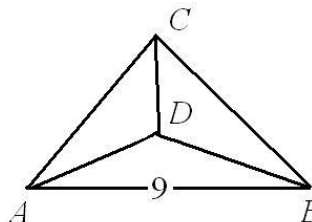
Vegyük észre, hogy csak a második fordulóban van eltérés a versenyzők számában.

Mivel a második esetben 24-gyel több dolgozat van: $\frac{n}{3} - \frac{n}{4} = 24$, azaz $n = 288$.

4. Az A , B , C és D pontokat az ábrán látható módon vonalakkal kötöttük össze, majd mind a négy pontot és mind a 6 vonalat a következő számokkal jelöltük: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 és 11 (a 10-est kihagytuk). Mindegyik számot pontosan egyszer használtuk fel. Bármelyik két pontban levő számok összege egyenlő az adott két pontot összekötő vonalon levő számmal. Az AB vonalon a 9-es szám van (lásd az ábrát). Melyik számmal van jelölve a CD vonal?

Megoldás: Az egy pontra illeszkedő vonalakra írt három különböző szám mindegyike nagyobb a pontra írt számnál. Ezek szerint sem a 8-as, sem a 11-es nem kerülhet pontra, mert nincs a felsorolt számok között náluk nagyobb három különböző szám, így a 8-as és a 11-es is kizárólag vonalra kerülhet.

Az 1-es szám nem kerülhet a 9-cel jelzett vonal egyik végpontjába sem, mert akkor a másikban csak 8-as lehetne, márpedig a 8-ast vonalra kell írunk (az imént levezettük). Írjuk az 1-est a C pontba. A 11-es vonalra kerül, de nem olyanra, amelynek egyik végén 1-es van, mert akkor a másik végén 10-esnek kellene lenni, ilyen szám pedig nincs. Írjuk hát a 11-est a BD vonalra.



Most keressünk helyet a 2-esnek. Csak pontra kerülhet, mert „vonalszámnak” kicsi. A 2-es nem kerülhet a 11-es vonal egyik végére sem, mert akkor a másikra 9-es kerülne, ezt a számot viszont már rögzítettük egy vonalhoz. Ezek szerint a 2-es csak az A pontba kerülhet. Innentől már egyértelműen következik a számok beírása: $9 - 2 = 7$ -es a B pontba, $7 + 1 = 8$ -as a BC vonalra, $2 + 1 = 3$ -as az AC vonalra, $11 - 7 = 4$ -es a D pontra, $4 + 2 = 6$ -os az AD vonalra, és $4 + 1 = 5$ -ös a CD vonalra.

A fenti eljárás során csak az 1-es és a 11-es helyét választhattuk volna meg másként, de abban az esetben is 5-ös került volna a CD vonalra, és a kapott tetraéderek a hozzárendelt számokkal együtt egymásba vihetők lettek volna.