

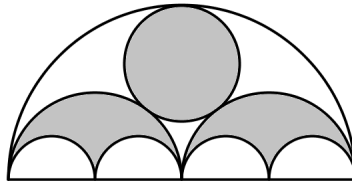
XII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2014. december 6.

8. évfolyam

1. András 40 másodperc alatt kerekezett végig egy kört a versenypályán. Balázs ugyanakkor és ugyanonnan indulva, de ellenkező irányba kerekezve 15 másodpercenként találkozott Andrással. Hány másodperc alatt tesz meg Balázs egy kört? (Mindketten egyenletes sebességgel bicikliztek.)

2. Határozd meg a satírozott terület nagyságát, ha ismert, hogy a kis félkörök sugara 1 cm !



3. Egy hatjegyű szám számjegyei 1,2,3,4,5 és 6. Az első két számjegyből álló szám páros. Az első három számjegyből álló szám osztható hárommal, az első négy számjegyből álló négyvel, az első ötből álló öttel, maga a szám pedig hattal. Melyik ez a szám?

4. Pisti felírta a táblára a számokat 1-től 12-ig. Ferivel a következő játékot játsszák: Felváltva letörölnek a tábláról két számot, és a letörölt számok helyett fölírják a két szám összegénél 1-gyel kisebb számot. A játék addig tart, amíg egyetlen egy szám marad a táblán. Ha ez a szám páros, akkor Pisti nyert, ha páratlan, akkor Feri. Hogyan játsszon Pisti, ha ő kezd, és mindenképpen nyerni szeretne Feri bármilyen „törlései” mellett?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

MEGOLDÁSOK – 8. évfolyam

1. András 40 másodperc alatt kerekedett végig egy kört a versenypályán. Balázs ugyanakkor és ugyanonnan indulva, de ellenkező irányba kerekelve 15 másodpercenként találkozott Andrással. Hány másodperc alatt tesz meg Balázs egy kört? (Mindketten egyenletes sebességgel bicikliztek.)

Megoldás: Az első találkozáskor (15 másodperc után) András megtette a 40 másodperces körútjának a $\frac{15}{40} = \frac{3}{8}$ -ad részét. Ugyanekkor (15 másodperc alatt) Balázs

megtette a kör $1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$ -ad részét. Innen egyenes arányossággal adódik a megoldás.

Legyen b a Balázs számára szükséges idő a teljes kör megtételéhez. Ekkor

$$\frac{5}{8} : 15 = 1 : b.$$

Innen b -t kifejezve kapjuk, hogy $b = 24$, azaz 24 másodpercre van szüksége Balásznak a teljes kör megtételéhez.

2. Határozd meg a satírozott terület nagyságát, ha ismert, hogy a kis félkörök sugara 1 cm !

Megoldás: A kis félkörök sugara 1 cm , a közepeseké 2 cm , a nagy félköré pedig 4 cm . A teljes kör sugarát az ABC derékszögű háromszög segítségével tudjuk kiszámolni.

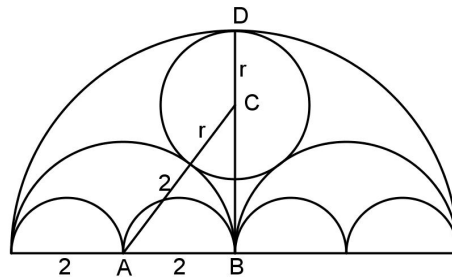
$$(2+r)^2 = 2^2 + (4-r)^2$$

$$12r = 16$$

$$r = \frac{4}{3}$$

A megfelelő sugarak ismeretében kiszámolható a satírozott rész területe:

$$T = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \pi + 2 \left(\frac{2^2 \pi}{2} - 2 \frac{\pi}{2}\right) = 3\frac{7}{9} \pi \approx 11,87 \text{ cm}^2.$$



3. Egy hatjegyű szám számjegyei 1,2,3,4,5 és 6. Az első két számjegyből álló szám páros. Az első három számjegyből álló szám osztható hárommal, az első négy számjegyből álló négyvel, az első ötből álló öttel, maga a szám pedig hattal. Melyik ez a szám?

Megoldás: Az ötödik számjegy csak az 5 lehet. A páros helyeken páros számok állnak, ezért az első és harmadik helyen az 1 és a 3 áll valamilyen sorrendben. Az első három számjegy összege osztható hárommal, ezért a második helyen csak a 2 állhat. A negyedik helyen nem állhat a négyes, mert sem a 14 sem a 34 nem osztható négyvel, így a negyedik számjegy a 6 lesz, a hatodik pedig a 4. Két ilyen szám van, az 123654 és a 321654.

4. Pisti felírta a táblára a számokat 1-től 12-ig. Ferivel a következő játékot játsszák: Felváltva letörölnek a tábláról két számot, és a letörölt számok helyett fölírják a két szám összegénél 1-gyel kisebb számot. A játék addig tart, amíg egyetlen egy szám marad a táblán. Ha ez a szám páros, akkor Pisti nyert, ha páratlan, akkor Feri. Hogyan játsszon Pisti, ha ő kezd, és mindenképpen nyerni szeretne Feri bármilyen „törlései” mellett?

Megoldás: Kezdőhelyzetben a táblán lévő számok összege: $1+2+\dots+12=78$. Minden törlés után az összeg 1-gyel csökken, és minden törlés után egy számmal kevesebb van a táblán. Vagyis a 12 darab számból 11 törlés után egyetlen szám marad, ekkor ér véget a játék, közben az összeg éppen 11-gyel csökkent, vagyis 67 lesz. Ezek szerint ez egy nagyon igazságtalan játék Pistivel szemben, mert Feri kezdőként akárhogy játszik, nyerni fog.