

A FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY 10 ÉVE

**BOLYAI TEHETSÉGGONDOZÓ
GIMNÁZIUM ÉS KOLLÉGIUM
ZENTA, 2013**

Szerkesztette: dr. Péics Hajnalka

A feladatokat válogatták és lektorálták:

Béres Zoltán

Csikós Pajor Gizella, magiszter

Zavargó Zsuzsanna

dr. Péics Hajnalka

dr. Ripcó Sipos Elvira

Szabó Magdolna

Az ábrákat készítette:

dr. Ripcó Sipos Elvira

CIP - Каталогизација у публикацији
Библиотека Матице српске, Нови Сад

51(079.1)

A FEKETE Mihály emlékverseny 10 éve [Elektronski izvor] / [szerkesztette Péics Hajnalka; az ábrákat készítette Ripcó Sipos Elvira]. -Zenta : Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, 2013. - 1 elektronski optički disk (CD-ROM) : tekst, slika ; 12 cm

Nasl. sa naslovnog ekrana. - Tiraž 200.

ISBN 978-86-917345-0-3

a) Математика - Задаци
COBBIS.SR-ID 281907719

BEVEZETŐ

A Fekete Mihály Emlékverseny az egyetlen vajdasági szervezésű és szintű matematikaverseny, amelyen csak magyarul tudó diákok vehetnek részt. Ezen a versenyen a tanulók összemérhetik tudásukat társaikkal és ezáltal is felkészülhetnek a hazai és nemzetközi matematikaversenyekre. Ez a verseny egyben a Nemzetközi Magyar Matematikaverseny válogatóversenye. A verseny névadója Fekete (Schwarz) Mihály (1886-1957) zentai születésű matematikus, aki Fejér Lipót tanítványa, Neumann János tanára volt. Legjelentősebb és egyben legismertebb eredményei a ponthalmazok elmélete, az algebra és a komplex függvénytan határterületéhez tartoznak.

A Fekete Mihály Emlékversenyt 2003 óta rendezik meg. Az elsőt az Észak-bácskai Magyar Pedagógusok Egyesületének égisze alatt szervezte Szabó Magda matematikatanár. A verseny ezután átköltözött Szabadkáról Zentára, az újonnan megalakuló Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium helyiségeibe. Ekkor vált a Gimnázium a hivatalos szervezőjévé a Bolyai Farkas Alapítvány közreműködésével. A versenybizottság elnöke minden évben dr. Péics Hajnalka volt, a versenybizottság tagjai pedig 2005 óta a Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium matematikatanárai.

A verseny háromfordulós: a két levelező fordulót a legjobbak megméretéseként egy zárthelyi rendszerű, feladatkidolgozós forduló, a döntő követi, amelyre általában november végén, december elején kerül sor. A döntőben a versenyzőknek 120 perc alatt kell négy feladatot megoldaniuk. A 2003 és 2012 között megrendezett döntők feladatsorait és megoldásait tartja a kezében a kedves Olvasó.

Kezdetben a Verseny csak a középiskolás diákokat szólította meg, de 2009-től a nyolcadikosokat, 2011-től pedig a hetedikeseket is bevontuk a versenybe. Ezzel a bővítéssel a döntő résztvevőinek a száma a százat is meghaladja. A legjobb helyezéseket elért versenyzők és felkészítő tanáraik oklevelet, könyvet és más ajándékokat kapnak. A legjobb általános iskolások ingyenes részvételt nyernek a Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium keretein belül szervezett Téli táborba, míg a legjobb középiskolások alkotják azt a csapatot, amely a vajdasági magyarságot képviseli a Nemzetközi Magyar Matematikaversenyen.

Az Emlékverseny nem csak versenyzésre ad alkalmat, hanem barátkozásra és új ismeretek szerzésére is. Minden évben rangos meghívott tanárok tartanak előadást érdekes matematikai témákról.

A Versenyen való részvétel a támogatóinknak köszönhetően ingyenes. Ezúton mondunk köszönetet a Bolyai Tehetséggondozó Gimnáziumnak és Kollégiumnak a logisztikai, a Bolyai Farkas Alapítványnak a pályázástechnikai segítségével, a Szekeres László Alapítványnak, a Magyar Nemzeti Tanácsnak és a Zentai Önkormányzatnak az anyagi támogatásért, a Szegedi Egyetem Bolyai Intézetének pedig a felajánlott ajándékkönyvekért.

A Fekete Mihály Emlékversennyel való törődés szakmai kötelességünk, ez készítetett bennünket ezen összeállítás elkészítésére is. Reméljük, e kiadvány hozzájárul ahhoz, hogy a diákok tanáraik segítségével minél sikeresebben tudjanak készülni és részt venni a Fekete Mihály Emlékversenyen, ezzel is továbbemelve annak színvonalát.

2013 novembere

a Szerzők

TARTALOMJEGYZÉK

I. Fekete Mihály Emlékverseny	5
II. Fekete Mihály Emlékverseny	20
III. Fekete Mihály Emlékverseny	38
IV. Fekete Mihály Emlékverseny	57
V. Fekete Mihály Emlékverseny	72
VI. Fekete Mihály Emlékverseny	88
VII. Fekete Mihály Emlékverseny	102
VIII. Fekete Mihály Emlékverseny	122
IX. Fekete Mihály Emlékverseny	142
X. Fekete Mihály Emlékverseny	164
Feladat típusok	185
Fekete Mihály (1886-1957)	186
A Nemzetközi Magyar Matematikaversenyek története	187

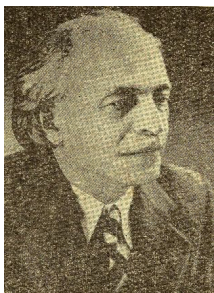
I. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Előadó: Árki Tamás

Előadás címe: Területszámítás és átdarabolás



Árki Tamás, az előadó, valamint a Versenybizottság tagjai, Szabó Magdolna, Csikós Pajor Gizella, Péics Hajnalka, Béres Zoltán, Zolnai Irén, Mészáros Anna és a versenyzők a Nép körben.



I. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

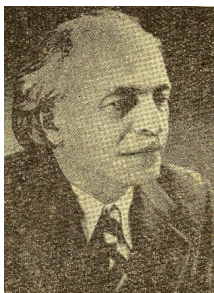
Szabadka, 2004. január 24.

9. évfolyam

1. Egy háromjegyű szám számjegyei különbözőek és nincs közöttük nulla. A számjegyek összege az n állandó. Bizonyítsd be, hogy a három számjegyből az összes lehetséges módon képezhető háromjegyű számok számtani közepe osztható 37-tel és n -nel!
2. Hány olyan – legalább kételemű – halmaz van, amelynek elemei egymást követő pozitív egész számok, és a halmaz elemeinek összege 100?
3. Vajon összetett-e a $2003^4 + 4^{2005}$ szám?
4. Az ABC háromszög C csúcsánál derékszög van. A B csúcsból induló szögfelező az AC befogót a P , a háromszög köréírt körét a Q pontban metszi. Mekkora a háromszög szögei, ha $|BP| = 2|PQ|$?
5. Egy hegyesszögű háromszög területe T . Minden oldal felezőpontjából merőlegest állítunk a másik két oldalra. Mekkora a hat merőleges által közrezárt konvex hatszög területe?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



I. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Szabadka, 2004. január 24.

10. évfolyam

1. Egy $n \times n$ -es táblázat minden mezőjére ráírjuk az 1, 2 és 3 számok valamelyikét. Ki lehet-e tölteni a táblázatot úgy, hogy a sorokban, az oszlopokban és a két átlóban levő számok összege mind különböző legyen?

2. Határozd meg a $2x^2 - 8xy + 17y^2 - 16x - 4y + 2072$ kifejezés legkisebb értékét, ha x és y tetszőleges valós számok!

3. Az $|AB|=1$ átmérőjű félkörbe olyan $ABCD$ trapézt szerkesztettünk, amely érintőnégyyszög is. Mekkora a trapéz két szára?

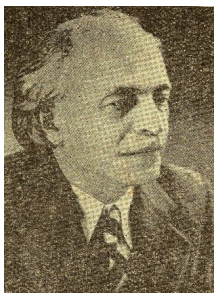
4. Legyenek d_1 , d_2 és d_3 egy hegyesszögű háromszög magasságpontját a csúcsokkal összekötő szakaszok. Igazold, hogy $d_1 + d_2 + d_3 > k$, ahol k a magasságok talppontjai által meghatározott háromszög területét jelöli!

5. Határozd meg a következő egyenlőtlenségrendszer összes megoldását a pozitív valós számok halmazán:

$$x_1 + \frac{1}{x_2} \leq 2, x_2 + \frac{1}{x_3} \leq 2, \dots, x_{2003} + \frac{1}{x_{2004}} \leq 2, x_{2004} + \frac{1}{x_1} \leq 2.$$

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



I. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Szabadka, 2004. január 24.

11. évfolyam

1. Bizonyítsd be, hogy az $f(x) = (m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 5$ függvény grafikonja az m valós paraméter bármely értékére ugyanazon a ponton halad keresztül! Határozd meg ennek a pontnak a koordinátáit!

2. Határozd meg az összes olyan pozitív x, y, z számokból álló számhármast, amelyekre teljesül a következő két egyenlőség:

$$x^3 + 3y^3 + z^5 + z = 1998 \text{ és } y^2z = x.$$

3. Az ABC háromszög BC oldalának felezőpontja A_1 , az AB oldalának felezőpontja C_1 , S pedig a háromszög súlypontja. Mekkora a háromszög szögei, ha

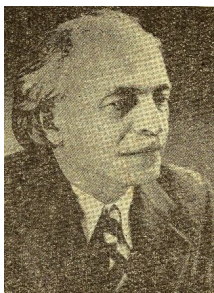
$$\angle CAA_1 = \angle CC_1A_1 \text{ és } \angle A_1SC_1 = \angle BAC + \angle ACB?$$

4. Az ABC háromszög belsejében lévő P pontra igaz, hogy $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$. Mivel egyenlő a $\angle PAB$ szög tangensének értéke, ha $|AB| = 13$, $|BC| = 14$ és $|AC| = 15$?

5. Bizonyítsd be, hogy ha egy tetraéder súlypontja mind a négy csúctól egyenlő távolságra van, akkor bármely két szemközti élpár felezőpontjait összekötő szakasz merőleges mindkét éltre!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



I. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Szabadka, 2004. január 24.

12. évfolyam

1. Oldd meg az egész számok halmazán a következő egyenletet:

$$x^4 - x^3y - xy^3 + y^4 = 1.$$

2. Egy nem állandó számtani sorozat első két tagjának összege és szorzata egyenlő egymással. Az első három tag összege és szorzata is egyenlő. Határozd meg a számtani sorozat első négy tagjának az összegét!

3. Az $ABCD$ trapéz csúcsai a k körre illeszkednek. A trapéz AD és BC szárainak meghosszabításai az M pontban metszik egymást. A k körhöz a B , illetve D pontokban húzott érintők metszéspontja N . Bizonyítsd be, hogy MN párhuzamos AB -vel!

4. Az a élű $ABCDEFGH$ kockában mekkora az $ADCH$ és a $BCDG$ tetraéderek közös részét képező test felszíne és térfogata?

5. Legyen A a tízes számrendszerben felírt 2003^{2005} szám számjegyeinek összege, B pedig az A számjegyeinek összege. Számítsd ki a B szám számjegyeinek összegét!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

AZ I. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI

9. évfolyam

1. Egy háromjegyű szám számjegyei különbözőek és nincs közöttük nulla. A számjegyek összege az n állandó. Bizonyítsd be, hogy a három számjegyből az összes lehetséges módon képezhető háromjegyű számok számtani közepe osztható 37-tel és n -nel!

Megoldás. Jelölje a háromjegyű szám számjegyeit a , b és c . Ekkor $a + b + c = n$, a képezhető hat szám pedig a következő:

$$\begin{array}{ll} \overline{abc} = 100a + 10b + c, & \overline{bca} = 100b + 10c + a, \\ \overline{acb} = 100a + 10c + b, & \overline{cab} = 100c + 10a + b, \\ \overline{bac} = 100b + 10a + c, & \overline{cba} = 100c + 10b + a. \end{array}$$

A számok számtani közepe:

$$S = \frac{222a + 222b + 222c}{6} = 37(a + b + c) = 37n.$$

Tehát S osztható 37-tel és n -nel.

2. Hány olyan – legalább kételemű – halmaz van, amelynek elemei egymást követő pozitív egész számok, és a halmaz elemeinek összege 100?

Megoldás. 1.eset: a feltételeknek eleget tevő H halmaz elemeinek száma páratlan, azaz $2n+1$, $n \in \mathbb{N}$. H elemeinek átlagát jelöljük x -szel, ez a középső egész szám. Most $(2n+1)x = 100$, tehát $2n+1$ csak 5 vagy 25 lehet.

Ha $2n+1=5$, akkor $n=2$, $x=20$, $H = \{18, 19, 20, 21, 22\}$.

Ha $2n+1=25$, akkor $n=12$, $x=4$, ami lehetetlen, mert H elemei pozitívak.

2.eset: a H halmaz elemeinek száma páros, azaz $2n$, $n \in \mathbb{N}$. H elemeinek x átlaga most a két középső szám számtani közepe. Így $2nx = 100$, tehát $2x = \frac{100}{n} \in \mathbb{N}$, de

$x = \frac{50}{n}$ már nem egész. n a 4 szóbajövő többszöröse lehet: 4, 20 vagy 100. Ha $n=4$,

akkor $x=12,5$; $H = \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$. Ha $n=20$ vagy $n=100$, akkor nincs alkalmas H halmaz.

Összefoglalva: két olyan halmaz van, amely a feltételeknek eleget tesz.

3. Vajon összetett-e a $2003^4 + 4^{2005}$ szám?

Megoldás. Végezzük el a következő átalakításokat:

$$\begin{aligned} 2003^4 + 4^{2005} &= (2003^2)^2 + (2^{2005})^2 = (2003^2 + 2^{2005})^2 - 2^{2006} \cdot 2003^2 = \\ &= (2003^2 + 2^{2005})^2 - (2^{1003} \cdot 2003)^2 = \\ &= (2003^2 + 2^{2005} - 2^{1003} \cdot 2003) \cdot (2003^2 + 2^{2005} + 2^{1003} \cdot 2003) \end{aligned}$$

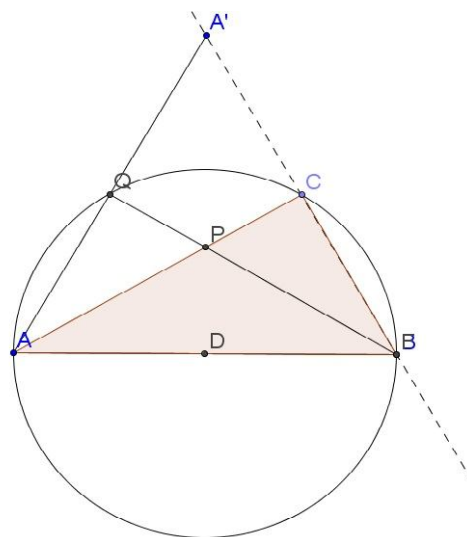
Mivel két négyzetszám különbségét kaptuk, ez nyilván két – egyenél nagyobb és egész – szám szorzata, tehát összetett szám.

4. Az ABC háromszög C csúcsánál derékszög van. A B csúcsból induló szögfelező az AC befogót a P , a háromszög köréírt körét a Q pontban metszi. Mekkora a háromszög szögei, ha

$$|BP| = 2|PQ|?$$

Megoldás. A $CBA \angle BQ$ szögfelezőjére az A pontot tükrözve A' pontot kapunk, és nyilvánvaló, hogy A' rajta van BC -n és $AB = A'B$.

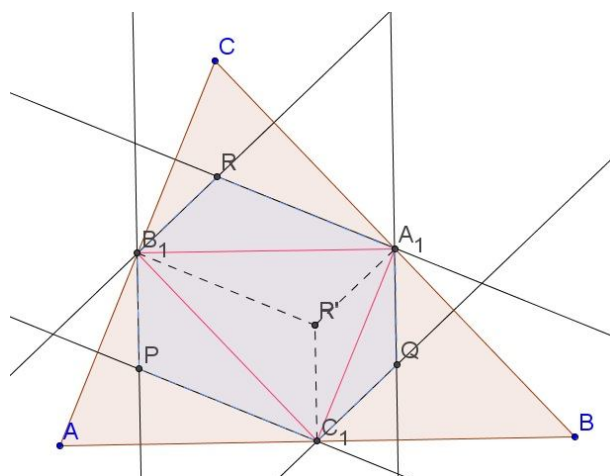
Mivel $|BP| = 2|PQ|$ miatt a P pont az $ABA'\Delta$ súlypontja, AC súlyvonala és $|BA| = |AA'|$ is teljesül. Így $ABA'\Delta$ egyenlő oldalú, tehát az $ABC\Delta$ hegyesszögei: 60° és 30° .



5. Egy hegyesszögű háromszög területe T . Minden oldal felezőpontjából merőlegest állítunk a másik két oldalra. Mekkora a hat merőleges által közrezárt konvex hatszög területe?

Megoldás. Tekintsük az ABC háromszöget, és jelölje A_1 , B_1 és C_1 , rendre az ABC háromszög A , B és C csúcaival szemben fekvő oldalainak középpontjait. Legyen továbbá P a B_1 pontból AB oldalra állított merőleges és a C_1 pontból AC oldalra állított merőleges metszéspontja, Q az A_1 pontból AB oldalra állított merőleges és a C_1 pontból BC oldalra állított merőleges metszéspontja, R pedig a B_1 pontból BC oldalra állított merőleges és az A_1 pontból AC oldalra állított merőleges metszéspontja. Az ABC háromszöget a középvonalai négy egybevágó háromszögre bontják, a meghúzott merőlegesek ezekben a háromszögekben magasságvonalak. Így a PB_1C_1 , QA_1C_1 és RB_1A_1 háromszögekből összerakható egy az $A_1B_1C_1$ háromszöggel egybevágó, $\frac{T}{4}$ területű háromszög.

Így a hatszög területe $\frac{T}{2}$.



10. évfolyam

1. Egy $n \times n$ -es táblázat minden mezőjére ráírjuk az 1, 2 és 3 számok valamelyikét. Ki lehet-e tölteni a táblázatot úgy, hogy a sorokban, az oszlopokban és a két átlóban levő számok összege mind különböző legyen?

Megoldás. Az $n \times n$ -es táblázatnak n sora és n oszlopa valamint 2 átlója van, tehát összesen $2n+2$ különböző összeget kell kapnunk. Minden összeg n tagú, a legkisebb n darab 1-est, a legnagyobb n darab 3-ast tartalmaz, vagyis az előforduló lehetséges összegek n és $3n$ között mozognak (beleértve a határokat is). Ez összesen $2n+1$ szám. Tehát a skatulya elv alapján nem lehetséges a $2n+2$ különböző összeget előállítani a $2n+1$ lehetséges összegből.

2. Határozd meg a $2x^2 - 8xy + 17y^2 - 16x - 4y + 2072$ kifejezés legkisebb értékét, ha x és y tetszőleges valós számok!

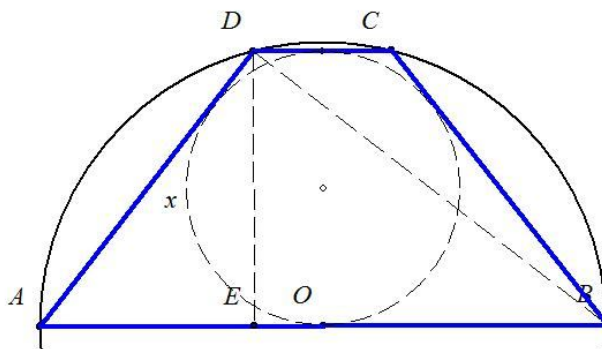
Megoldás. Végezzük el a következő átalakításokat:

$$2x^2 - 8xy + 17y^2 - 16x - 4y + 2072 = 2(x - 2y - 4)^2 + 9(y - 2)^2 + 1994 \geq 1994$$

minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén. Az 1994 értéket fel is veszi $x = 8$ és $y = 2$ esetén.

3. Az $|AB|=1$ átmérőjű félkörbe olyan $ABCD$ trapézt szerkesztettünk, amely érintőnéyszög is. Mekkora a trapéz két szára?

Megoldás. Az $ABCD$ trapéz egyenlő szárú, mert húrnégyszög. AD szárának hossza legyen x , és legyen a D csúcs merőleges vetülete az AB szakaszra E pont. Ekkor az $AED\Delta$ és $ADB\Delta$ derékszögű háromszögek hasonlósága miatt $\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|AE|}{|AD|}$, vagyis $|AE| = x^2$, így $|CD| = |AB| - 2 \cdot |AE| = 1 - 2x^2$.



Mivel $ABCD$ érintőnéyszög is, ezért $|AB| + |CD| = 2 \cdot |AD|$, azaz $1 + (1 - 2x^2) = 2x$, vagyis $x^2 + x - 1 = 0$, megoldásaiból csak a pozitív lehetséges, tehát $x = |AD| = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

4. Legyenek d_1 , d_2 és d_3 egy hegyesszögű háromszög magasságpontját a csúcsokkal összekötő szakaszok. Igazold, hogy $d_1 + d_2 + d_3 > k$, ahol k a magasságok talppontjai által meghatározott háromszög területét jelöli.

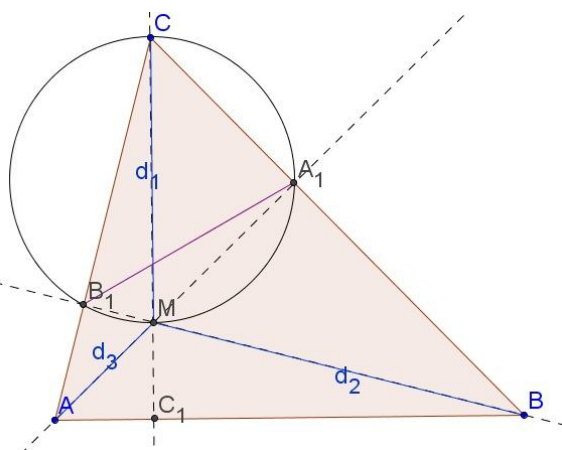
I.Megoldás. Tekintsük az ABC háromszöget, amelyben a A_1 az A csúcsból kiinduló, B_1 a B csúcsból kiinduló, C_1 a C csúcsból kiinduló magasságvonal talppontja, M pedig a magasságvonalak metszéspontja. Ekkor $d_1 = |MC|$, $d_2 = |MB|$ és $d_3 = |MA|$. Thálész tétele szerint MC a CA_1MB_1 négyyszög köré írt kör átmérője, A_1B_1 pedig húrja. Mivel a háromszög hegyesszögű, így $d_1 > |A_1B_1|$.

Hasonlóan belátható, hogy

$$d_2 > |A_1C_1| \text{ és } d_3 > |B_1C_1|.$$

Az egyenlőtlenségek összevonásával kapjuk, hogy

$d_1 + d_2 + d_3 > |A_1B_1| + |A_1C_1| + |B_1C_1| = k$,
amit bizonyítani kellett.



II.Megoldás. Az AMB , BMC és CMA háromszögekben a háromszög egyenlőtlenségeket felírva kapjuk, hogy $d_2 + d_3 > c$, $d_1 + d_2 > a$ és $d_1 + d_3 > b$. Ebből

$$d_1 + d_2 + d_3 > \frac{1}{2}(a + b + c).$$

Mivel $\frac{1}{2}(a + b + c)$ az oldalak felezőpontjai által meghatározott háromszög kerülete, ezért nem lehet kisebb, mint a talpponti háromszög kerülete, amely az összes beírt háromszögek kerületei közt a minimális, így $d_1 + d_2 + d_3 > k$.

5. Határozd meg a következő egyenlőtlenségrendszer összes megoldását a pozitív valós számok halmazán:

$$x_1 + \frac{1}{x_2} \leq 2, x_2 + \frac{1}{x_3} \leq 2, \dots, x_{2003} + \frac{1}{x_{2004}} \leq 2, x_{2004} + \frac{1}{x_1} \leq 2.$$

Megoldás. Az egyenlőtlenségek összeadása és rendezése után azt kapjuk, hogy

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) + \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) + \dots + \left(x_{1998} + \frac{1}{x_{1998}}\right) \leq 1998 \cdot 2.$$

Mivel pozitív x esetén $\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 2$, és egyenlőség csak $x = 1$ esetén áll fenn, ezért a fenti egyenlőtlenség csak egyenlőséggel teljesülhet, és csak akkor, ha

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{1998} = 1.$$

Ez valóban megoldás is.

11. évfolyam

1. Bizonyítsd be, hogy az $f(x) = (m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 5$ függvény grafikonja az m valós paraméter bármely értékére ugyanazon a ponton halad keresztül! Határozd meg ennek a pontnak a koordinátáit!

Megoldás. Ha van olyan $(x_0, f(x_0))$ pont, hogy bármely m -re

$$f(x_0) = (m+1)x_0^2 - 2(m-1)x_0 + m - 5 = m(x_0^2 - 2x_0 + 1) + x_0^2 + 2x_0 - 5$$

állandó, ez csak $x_0^2 - 2x_0 + 1 = 0$ esetén lehetséges. Ekkor $x_0 = 1$ és $f(x_0) = -2$, így az $(1; -2)$ ponton valóban bármely m -re áthalad a függvény grafikonja.

2. Határozd meg az összes olyan pozitív x, y, z számokból álló számhármast, amelyekre teljesül a következő két egyenlőség:

$$x^3 + 3y^3 + z^5 + z = 1998 \text{ és } y^2z = x.$$

Megoldás. A feltételt kielégítő számokra fennáll, hogy

$$y^6z^3 + 3y^3 + z^5 + z = 1998, \text{ tehát } y^3 = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4z^3(z^5 + z - 1998)}}{2z^3}.$$

z értéke csak 1, 2, 3 vagy 4 lehet, mert $z > 4$ esetén $z^5 + z > 1998$ miatt a négyzetgyök alatt negatív szám áll.

Ezek közül csak $z = 3$ -ra lesz y pozitív egész, ekkor $y = 2$ és $x = 12$. A $(12; 2; 3)$ számhármast valóban megoldás.

3. Az ABC háromszög BC oldalának felezőpontja A_1 , az AB oldalának felezőpontja C_1 , S pedig a háromszög súlypontja. Mekkora a háromszög szögei, ha

$$\angle CAA_1 = \angle CC_1A_1 \text{ és } \angle A_1SC_1 = \angle BAC + \angle ACB?$$

Megoldás. Vezessük be a $\angle CAA_1 = \alpha$ jelölést. Ekkor $\angle CC_1A_1 = \alpha$ és így $AC \parallel A_1C_1$ miatt

$$\angle ACC_1 = \angle AA_1C_1 = \alpha.$$

Mivel az ACA_1C_1 négyszög körbe írható,

$$\angle A_1CC_1 = \angle A_1AC_1 = \beta.$$

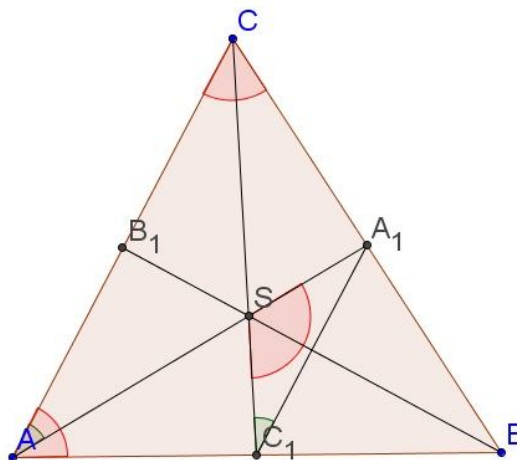
$$\angle A_1SC_1 = \angle BCA + \angle CAB$$

miatt

$$180^\circ - 2\alpha = 2\alpha + 2\beta,$$

$$\angle AC_1C = 180^\circ - (2\alpha + \beta) = 90^\circ.$$

Így $\alpha = \beta = 30^\circ$, az ABC háromszög minden szöge pedig 60° .



4. Az ABC háromszög belsejében lévő P pontra igaz, hogy $PAB\angle = PBC\angle = PCA\angle$. Mivel egyenlő a $PAB\angle$ szög tangensének értéke, ha $|AB|=13$, $|BC|=14$ és $|AC|=15$?

Megoldás. Legyen $PAB\angle = \varphi$, $|PA|=x$, $|PB|=y$ és $|PC|=z$. Ekkor a háromszög területe

$$T = \frac{1}{2} \sin \varphi (13x + 14y + 15z),$$

tehát

$$\sin \varphi = \frac{2T}{13x + 14y + 15z} = \frac{168}{13x + 14y + 15z},$$

mert a Héron képlet alapján $T = 84$.

Írjuk fel a PAB , PBC és PCA háromszögekre a koszinusz tételt:

$$y^2 = 13^2 + x^2 - 26x \cos \varphi,$$

$$z^2 = 14^2 + y^2 - 28y \cos \varphi,$$

$$x^2 = 15^2 + z^2 - 30z \cos \varphi.$$

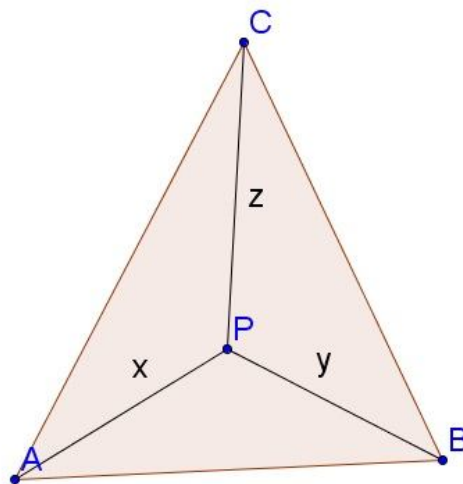
Ezeket összeadva: $13^2 + 14^2 + 15^2 = (26x + 28y + 30z) \cos \varphi$.

Rendezve azt kapjuk, hogy

$$\cos \varphi = \frac{13^2 + 14^2 + 15^2}{2(13x + 14y + 15z)},$$

s ebből

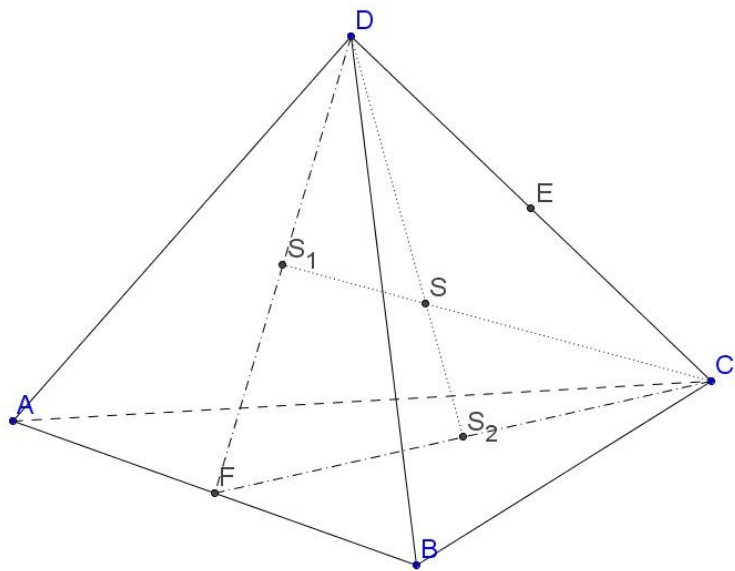
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{168}{295}.$$



5. Bizonyítsd be, hogy ha egy tetraéder súlypontja mind a négy csúcstól egyenlő távolságra van, akkor bármely két szemközti élpár felezőpontjait összekötő szakasz merőleges mindkét élre!

Megoldás. Legyen az ABC háromszög a tetraéder alaplaja, D pedig a csúcspontja. Jelölje E és F rendre a CD és AB oldalélek középpontját, a CFD háromszögben pedig S_1 és S_2 rendre az FD és CF oldalak középpontját, S pedig a CS_1 és DS_2 szakaszok metszéspontját. Elegendő megmutatni, hogy a CFD háromszög egyenlő szárú, tehát EF ebben a háromszögben az alaphoz tartozó magasságvonal, amiből már következik a feladat állítása. A feltételek alapján $|AS| = |BS| = |CS| = |DS|$, és a súlyvonal tulajdonságai miatt $|SS_1| = |SS_2|$, azaz $|CS_1| = |DS_2|$.

A párhuzamos szelők tétele és a súlyvonal tulajdonsága miatt CDS_1S_2 szimmetrikus trapéz, amiből következik, hogy CFD valóban egyenlő szárú háromszög. A többi oldalra és a megfelelő felezőpontokat összekötő egyenesekre hasonlóan végezhető el a bizonyítás.



12. évfolyam

1. Oldd meg az egész számok halmazán a következő egyenletet:

$$x^4 - x^3y - xy^3 + y^4 = 1.$$

Megoldás. Alakítsuk át az egyenlet bal oldalát a következő módon:

$$x^4 - x^3y - xy^3 + y^4 = x^3(x-y) - y^3(x-y) = (x-y)^2(x^2 + xy + y^2).$$

Mivel x és y egészek, ezért $(x-y)^2 = 1$ és $x^2 + xy + y^2 = 1$, amiből a két egyenlet kivonása után $xy = 0$ következik.

Ha $x = 0$, akkor $y = 1$ vagy $y = -1$, ha pedig $y = 0$, akkor $x = 1$ vagy $x = -1$.

Az egyenlet megoldáshalmaza:

$$M = \{(1;0), (-1;0), (0;1), (0;-1)\}.$$

2. Egy nem állandó számtani sorozat első két tagjának összege és szorzata egyenlő egymással. Az első három tag összege és szorzata is egyenlő. Határozd meg a számtani sorozat első négy tagjának az összegét!

Megoldás. Legyen a számtani sorozat első négy tagja $a_1 = a$, a_2 , a_3 és a_4 . A feltétel szerint $a \neq a_2$, $a + a_2 = aa_2$ és $a + a_2 + a_3 = aa_2a_3$. Ezekből az adatokból nyilvánvaló, hogy $a \neq 0$ és $a \neq 1$, továbbá

$$a_2 = \frac{a}{a-1} \text{ és } a_3 = \frac{a^2}{a^2 - a + 1}.$$

A számtani sorozat tulajdonságai alapján $a + a_3 = 2a_2$, amiből az előzőek alapján és rendezéssel megkapjuk, hogy $a^3 - 3a^2 + 3a - 1 = 2$. Ezt az egyenletet $(a-1)^3 = 2$ alakba írva kapjuk az egyetlen valós megoldást: $a = 1 + \sqrt[3]{2}$. A számtani sorozat első négy tagja így:

$$a_1 = 1 + \sqrt[3]{2}, a_2 = \frac{1 + \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}, a_3 = \frac{3}{1 + \sqrt[3]{2}}, a_4 = 2a_3 - a_2 = \frac{6}{1 + \sqrt[3]{2}} - 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Az első négy tag összege tehát: $S_4 = 1 + \sqrt[3]{2} + \frac{9}{1 + \sqrt[3]{2}}.$

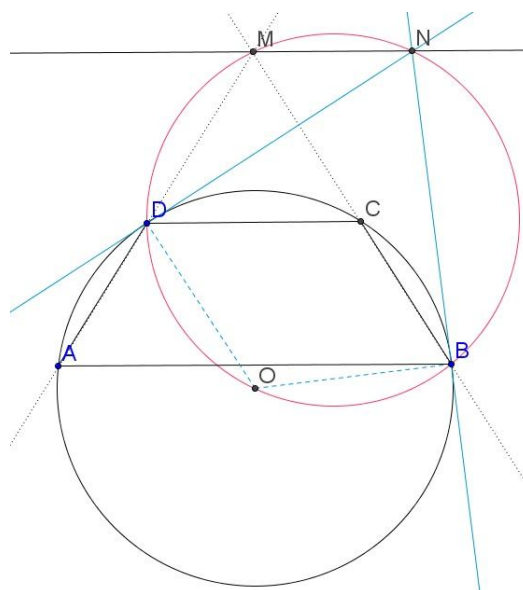
3. Az $ABCD$ trapéz csúcsai a k körre illeszkednek. A trapéz AD és BC szárainak meghosszabításai az M pontban metszik egymást. A k körhöz a B , illetve D pontokban húzott érintők metszéspontja N . Bizonyítsd be, hogy MN párhuzamos AB -vel!

Megoldás. Mivel

$$\angle ABD = \angle BDC = \angle CBN$$

és $\angle ABD = \angle ACD = \angle MDN$, ezért $BDMN$ húrnégyszög.

Így $\angle NDC = \angle DBC = \angle DNM$, ezért $DC \parallel MN$, ezért $AB \parallel MN$ is teljesül, amit bizonyítani kellett.



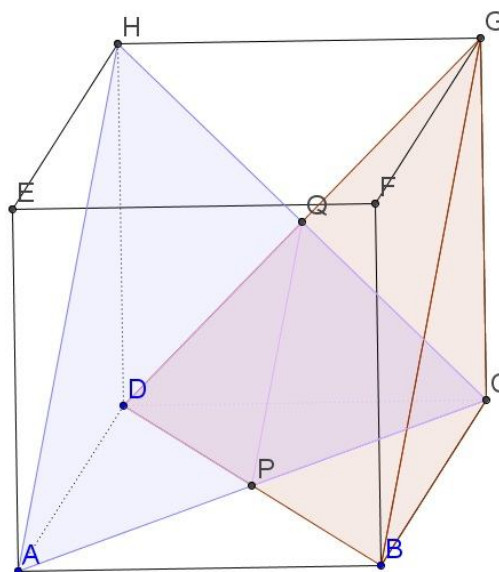
4. Az a élű $ABCDEFGH$ kockában mekkora az $ADCH$ és a $BCDG$ tetraéderek közös részét képező test felszíne és térfogata?

Megoldás. Legyen az $ABCD$ alaplapp középpontja P , a $CGHD$ lap középpontja Q . A két tetraéder közös része a $DPCQ$ tetraéder. A DCP és CQD háromszögek területe egyenként $\frac{a^2}{4}$, a PCQ oldallap területe az ACH szabályos háromszög területének negyede. Tehát a keresett felszín és térfogat:

$$F = 2 \cdot \frac{a^2}{4} + 2 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{8} = \frac{(2 + \sqrt{3})a^2}{4}$$

és

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{24}.$$



5. Legyen A a tízes számrendszerben felírt 2003^{2005} szám számjegyeinek összege, B pedig az A számjegyeinek összege. Számítsd ki a B szám számjegyeinek összegét!

Megoldás. Jelöljük a 2003^{2005} számot N -nel, a B jegyeinek az összegét C -vel. Ha a „ $\rightarrow$ ” jel a „számjegyeinek az összege” kapcsolatot jelöli, akkor a feladat szerint

$$N \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C,$$

ahol a C értékét kell kiszámolnunk.

Mivel tudjuk, hogy egy szám és a szám számjegyeinek az összege 9-cel osztva ugyanazt a maradékot adja, így a fenti láncon végigfutva N és C a kilencnek ugyanabba a maradékosztályába esik.

A 2003 első hat hatványának 9-es maradékai rendre 5, 7, 8, 4, 2, 1, és a további hatványozások során ezek a maradékok ismétlődnek ebben a sorrendben. (Ez utóbbi állítás binomiális képlettel vagy matematikai indukcióval is bizonyítható). Ezek alapján a 2003 hattal osztható kitevőjű hatványai kilencel osztva 1-est adnak maradékul (például a 2004 kitevőjű), a rákövetkező pedig 5-öst. Ezek alapján az N , és így a C is a 9-esnek az 5-ös maradékosztályába tartozik.

A továbbiakban becsljük felül a keletkező összegeket. Az

$$N = 2003^{2005} < 10000^{2005} = 10^{8020},$$

vagyis N legfeljebb 8020 jegyű, így számjegyeinek összege: $A \leq 9 \cdot 8020 = 72180$. A 72180-nál kisebb számjegyek összege biztosan kisebb, mint $7 + 9 + 9 + 9 + 9 = 43$, azaz $B < 43$. A 43-nál kisebb számok számjegyeinek összege a 39 esetében a legnagyobb, 12, így $C \leq 12$.

Így tehát a C egy tizenkettőnél nem nagyobb szám, amely 9-cel osztva 5-öt ad maradékul, azaz $C = 5$.

AZ I. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY DÍJAZOTTJAI

9. évfolyam

1. Takács Árpád, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **I. díj**
2. Lakatos Zoltán, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **I. díj**
3. Döme Zsolt, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
4. Csizmadia Zsolt, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
5. Somogyi Huba, Műszaki Középiskola, Szabadka, **II. díj**
6. Varga Dávid, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **III. díj**
7. Grósz Tímea, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **III. díj**
8. Raffai Zsolt, Zentai Gimnázium, Zenta, **III. díj**
9. Dósa Szilvia, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **III. díj**

10. évfolyam

1. Sóti Valentin, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **II. díj**
2. Oláh Attila, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **II. díj**
3. Ficinger Viktor, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **III. díj**
4. Ladócki Janka, Zentai Gimnázium, Zenta, **III. díj**

11. évfolyam

1. Nagy Alfréd, Dositej Obradović Gimnázium, Topolya, **III. díj**
2. Hallgató Emese, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **III. díj**

12. évfolyam

1. Jungábel Éva, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **III. díj**

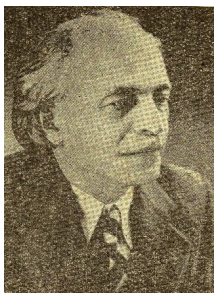
II. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Előadó: dr. Kosztolányi József

Előadás címe: Számelméleti érdekességek



A Versenybizottság elnöke, Péics Hajnalka aláírja az okleveleket.



II. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2005. január 29.

9. évfolyam

1. Oldd meg a pozitív egész számok halmazán a következő egyenletet:

$$y^3 - x^3 = 21.$$

2. Bizonyítsd be, hogy 6 osztója $n^2 + 5$ -nek, ha n páratlan és 3-mal nem osztható egész szám!

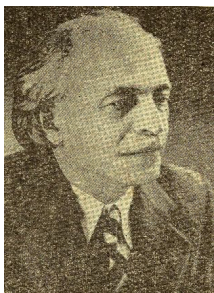
3. Igazold, hogy ha a , b és c különböző pozitív számok és $a + b + c = 1$, akkor $(1-a)(1-b)(1-c) > 8abc$.

4. Hány négyzet látható egy 8×8 -as sakktáblán? Hány olyan téglalap van, amely nem négyzet?

5. Egy derékszögű háromszög befogói 28 cm és 45 cm hosszúságúak. Határozd meg a háromszög beírható és köréírható körei középpontjainak távolságát!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



II. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2005. január 29.

10. évfolyam

1. Oldd meg az egész számok halmazán a következő egyenletet:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}.$$

2. Oldd meg a következő egyenlőtlenséget:

$$(1+x)^2 < \sqrt{(1-x^2)^2}.$$

3. Adott területű derékszögű háromszögek közül melyiknek legkisebb az átfogója?

4. Igaz-e, hogy

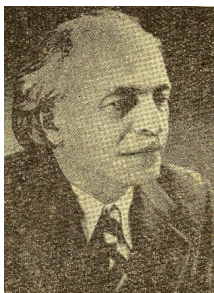
$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = 1?$$

5. Egy háromszög szögeinek mértékei számtani sorozatot alkotnak. Határozd meg ezeknek a szögeknek a mértékét külön-külön, ha tudjuk, hogy szinuszaik összege

$$\frac{3+\sqrt{3}}{2}.$$

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



II. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2005. január 29.

11. évfolyam

1. Oldd meg a következő egyenletet:

$$4^x + 9^x + 25^x = 6^x + 10^x + 15^x.$$

2. Bizonyítsd be, hogy ha a , b és c egy háromszög oldalhosszúságai, akkor

$$abc > (a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c).$$

3. Igazold, hogy minden valós x értékre teljesül a következő reláció:

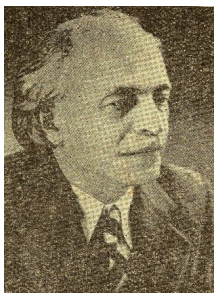
$$x^4 + 1 \geq 2x(x^2 - x + 1).$$

4. A Pitagorasz tétel szerint, bármely derékszögű háromszög befogóira rajzolt négyzetek területének összege egyenlő az átfogóra rajzolt négyzet területével. Igaz-e a tétel következő általánosítása: bármely derékszögű háromszög befogóira rajzolt szabályos n -szögek ($n \geq 3$) területének összege egyenlő az átfogóra rajzolt szabályos n -szög területével.

5. Az $ABCD A'B'C'D'$ egységnyi élű kocka AC' testátlójának mely P pontjára teljesül, hogy $\angle APC = 60^\circ$?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



II. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2005. január 29.

12. évfolyam

1. Oldd meg a következő egyenletet a nemnegatív egész számok halmazán:

$$x^{y+1} = (x+1)^y.$$

2. Igazold, hogy bármely négyzetszámot 16-tal osztva négyzetszámot kapunk maradékul!

3. Határozd meg az f függvény szélsőértékeit, ha

$$f(x) = \frac{2x^2 + 6x + 6}{x^2 + 4x + 5}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

4. Adott a síkban n egyenes. Legalább, illetve legfeljebb hány részre osztja fel a síkot az n egyenes?

5. Bizonyítsd be, hogy ha a háromszög S súlypontján és beírható körének O középpontján áthaladó egyenes párhuzamos a háromszög valamely oldalával, akkor a háromszög oldalainak mérőszámai számtani sorozatot alkotnak!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

A II. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI

9. évfolyam

1. Oldd meg a pozitív egész számok halmazán a következő egyenletet:

$$y^3 - x^3 = 21.$$

Megoldás. Az egyenletnek csak olyan (x, y) pozitív egész számokból álló számpár lehet a megoldása, amelyre $y > x$. Alkalmazva az ismert azonosságot adódik, hogy

$$(y - x)(y^2 + xy + x^2) = 21.$$

A 21 két pozitív szám szorzatára a következő módon bontható:

a)	$y - x = 1$	$y^2 + xy + x^2 = 21$
b)	$y - x = 3$	$y^2 + xy + x^2 = 7$
c)	$y - x = 7$	$y^2 + xy + x^2 = 3$
d)	$y - x = 21$	$y^2 + xy + x^2 = 1$

A c) és d) esetek nem lehetségesek, hiszen a pozitív egész számok halmazán $y^2 + xy + x^2 > 3$. (Az egyenlőség $y > x$ miatt nem teljesülhet.)

Tekintsük az a) esetet: $y - x = 1$ és $y^2 + xy + x^2 = 21$. Mivel $y = x + 1$, ezért

$(x + 1)^2 + x(x + 1) + x^2 = 21$, azaz $3x^2 + 3x = 20$. A bal oldal osztható 3-mal, a jobb nem, tehát ebben az esetben nincs megoldás.

Tekintsük a b) esetet: $y - x = 3$ és $y^2 + xy + x^2 = 7$. Mivel $y = x + 3$, ezért

$(x + 3)^2 + x(x + 3) + x^2 = 7$, azaz $3x^2 + 9x + 9 = 7$, ami szintén nem teljesülhet egyetlen x pozitív egész számra sem. Az egyenletnek a pozitív egész számok halmazán tehát nincs megoldása.

2. Bizonyítsd be, hogy 6 osztója $n^2 + 5$ -nek, ha n páratlan és 3-mal nem osztható egész szám!

Megoldás. Bármely n egész szám a következő alakok valamelyikében írható fel:

$$n = \begin{cases} 6k \\ 6k + 1 \\ 6k + 2 \\ 6k + 3 \\ 6k + 4 \\ 6k + 5 \end{cases} \quad (k \text{ egész szám}), \text{ viszont } n = \begin{cases} 6k + 1 \\ 6k + 3 \\ 6k + 5 \end{cases} \quad (k \text{ egész szám})$$

páratlan n esetén adja a megmaradó lehetőségeket.

Mivel n nem osztható 3-mal, ezért $n = \begin{cases} 6k + 1 \\ 6k + 5 \end{cases} \quad (k \text{ egész szám})$ lehetséges.

Ha $n = 6k + 1$, akkor $n^2 + 5 = 36k^2 + 12k + 1 + 5 = 36k^2 + 12k + 6$. Mivel az összeg minden tagja osztható 6-tal, ezért az összeg is ilyen tulajdonságú.

Ha $n = 6k + 5$, akkor $n^2 + 5 = 36k^2 + 60k + 25 + 5 = 36k^2 + 60k + 30$, ami szintén osztható 6-tal.

3. Igazold, hogy ha a, b és c különböző pozitív számok és $a+b+c=1$, akkor $(1-a)(1-b)(1-c) > 8abc$.

Megoldás. Tekintsük a bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldalán álló szorzat tényezőit és az $a+b+c=1$ feltételt, amiből

$$1-a=b+c, 1-b=a+c \text{ és } 1-c=a+b.$$

Ezt felhasználva azt kell igazolni, hogy

$$(b+c)(a+c)(a+b) > 8abc.$$

Osszuk el mindkét oldalt 8-cal és hajtsunk végre egy célszerű átalakítást:

$$\frac{b+c}{2} \cdot \frac{a+c}{2} \cdot \frac{a+b}{2} > abc.$$

A bal oldalon álló tényezők számtani közepek, amelyek a megfelelő mértani közepekkel az alábbi relációban vannak:

$$\frac{b+c}{2} > \sqrt{bc}, \frac{a+c}{2} > \sqrt{ac} \text{ és } \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}, \text{ így}$$

$$\frac{b+c}{2} \cdot \frac{a+c}{2} \cdot \frac{a+b}{2} > \sqrt{bc} \cdot \sqrt{ac} \cdot \sqrt{ab},$$

ami egyenértékű a bizonyítandó egyenlőtlenséggel:

$$\frac{b+c}{2} \cdot \frac{a+c}{2} \cdot \frac{a+b}{2} > \sqrt{a^2 b^2 c^2} = abc.$$

4. a) Hány négyzet látható egy 8×8 -as sakktáblán?

b) Hány olyan téglalap van, amely nem négyzet?

Megoldás. a) A lehetséges négyzeteket soroljuk osztályokba aszerint, hogy hány egység a négyzet oldala. (A „legkisebb” négyzetek oldalait tekintjük egységnek.)

1 egység oldalú négyzetek száma: $8^2 = 64$.

2 egység oldalú négyzetek száma: $7^2 = 49$, mert a bal felső sarokban tekintett 2×2 -es négyzetnek $7 \cdot 7$ „elmozdulása” lehetséges.

3 egység oldalú négyzetek száma: $6^2 = 36$, mert a bal felső sarokban tekintett 3×3 -as négyzetnek $6 \cdot 6$ „elmozdulása” lehetséges.

Az eljárást folytatva azt kapjuk, hogy 8 egységnyi oldalú négyzet pontosan egy van. A négyzetek száma tehát: $8^2 + 7^2 + 6^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 204$.

b) (I) Nevezzük az olyan téglalapot, amelynek két vízszintes oldala m egység, két függőleges oldala n egység (m, n) típusúnak, ahol $1 \leq m \leq 8$, $1 \leq n \leq 8$ és $m \neq n$.

Rövid meggondolás után világos, hogy az (m, n) típusú téglalapok száma $(9-m) \cdot (9-n)$. Számláljuk össze a lehetséges típusú téglalapok számát:

$$(1, n): 8 \cdot (1+2+3+4+5+6+7) = 8 \cdot 28 = 224$$

$$(2, n): 7 \cdot (1+2+3+4+5+6+8) = 7 \cdot 29 = 203$$

$$(3, n): 6 \cdot (1+2+3+4+5+7+8) = 6 \cdot 30 = 180$$

$$(4, n): 5 \cdot (1+2+3+4+6+7+8) = 5 \cdot 31 = 155$$

$$(5, n): 4 \cdot (1+2+3+5+6+7+8) = 4 \cdot 32 = 128$$

$$(6, n): 3 \cdot (1+2+3+4+5+7+8) = 3 \cdot 33 = 99$$

$$(7, n): 2 \cdot (1+3+4+5+6+7+8) = 2 \cdot 34 = 68$$

$$(8, n): 1 \cdot (2+3+4+5+6+7+8) = 1 \cdot 35 = 35$$

Azon téglalapok száma, amelyek nem négyzetek:

$$224 + 203 + 180 + 155 + 128 + 99 + 68 + 35 = 1092.$$

b) (II) Összeszámláljuk a sakktáblán látható téglalapok számát. Ez a szám tartalmazza a négyzetek számát is. Az így kapott számból levonva a négyzetek számát, megkapjuk azon téglalapok számát, amelyek nem négyzetek. Alkalmazva az (I)-ben látott számlálási eljárást azzal a módosítással, hogy $m = n$ is lehetséges, a következőt kapjuk:

$$(1, n): 8 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) = 8 \cdot 36$$

$$(2, n): 7 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) = 7 \cdot 36$$

$$\vdots$$

$$(8, n): 1 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) = 1 \cdot 36$$

A téglalapok száma: $36^2 = 1296$, azon téglalapok száma pedig, amelyek nem négyzetek: $1296 - 204 = 1092$.

5. Egy derékszögű háromszög befogói 28 cm és 45 cm hosszúságúak. Határozd meg a háromszög beírható és köréírható körei középpontjainak távolságát!

I. Megoldás. Tekintsük az ABC derékszögű háromszöget, ahol $\angle ACB = 90^\circ$. Legyen F a háromszög köréírható körének, O pedig a háromszög beírható körének középpontja. Húzzunk az F ponton keresztül (ez nyilván az átfogó felezőpontja) párhuzamost a háromszög AC befogójával, az O ponton keresztül pedig párhuzamost a háromszög BC befogójával. Legyen a P pont a most meghúzott párhuzamosok metszéspontja. Az így keletkezett POF háromszög befogói $14 - r$, illetve $22,5 - r$, ahol r az ABC háromszög beírható körének sugara. A r sugár hosszát könnyen meghatározhatjuk a kör külső pontból húzott érintőszakaszainak egyenlőségéből:

$$|AB| = 28 - r + 45 - r.$$

Most kiszámítjuk az AB átfogó hosszát a Pitagorasz tételből:

$$|AB|^2 = 28^2 + 45^2 = 2809, \text{ ahonnan } |AB| = 53, \text{ tehát } r = \frac{28 + 45 - 53}{2} = 10.$$

Most már felírhatjuk a POF háromszögre is a Pitagorasz tételt:

$$|OF|^2 = 4^2 - 12,5^2 = 172,25,$$

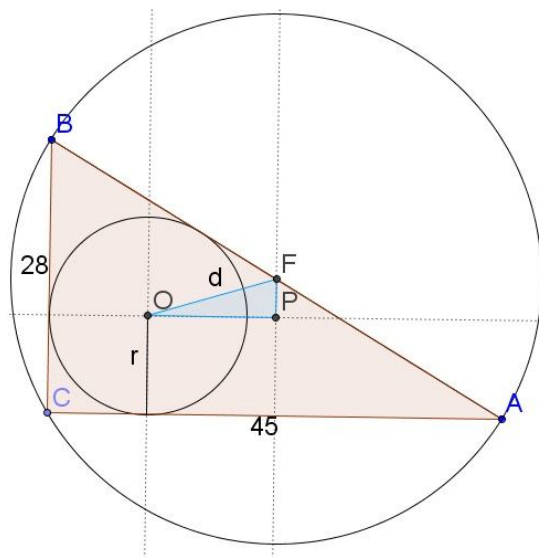
ahonnan a keresett távolság

$$|OF| \approx 13,12.$$

II. Megoldás. Bármely háromszög beírható és köréírható körei középpontjainak d távolságára igaz, hogy $d^2 = R^2 - 2Rr$, ahol r a háromszög beírható körének, R pedig a háromszög köréírható körének sugara. Most $R = 26,5$, az átfogó fele, a beírható kör sugara $r = 10$, így

$$d^2 = 26,5^2 - 2 \cdot 26,5 \cdot 10 = 172,25,$$

ahonnan $d \approx 13,12$ adódik.



10. évfolyam

1. Oldd meg az egész számok halmazán a következő egyenletet:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}.$$

Megoldás. Nyilvánvaló, hogy csak olyan (x, y) számpárok lehetnek megoldások, amelyekre $x \neq 0$ és $y \neq 0$. Szorozzuk meg mindkét oldalt $3xy$ -nal, rendezés és kiemelés után a következőt kapjuk:

$$3y + 3x = xy, \text{ azaz } y(x-3) = 3x.$$

Mivel $x \neq 3$ (hiszen az $x = 3$ esetben $y \cdot 0 = 9$ lenne, ami lehetetlen), ezért

$$y = \frac{3x}{x-3} = \frac{3(x-3)+9}{x-3} = 3 + \frac{9}{x-3}$$

adódik. Az y pontosan akkor egész, ha $\frac{9}{x-3}$ egész, azaz ha $x-3$ osztója 9-nek. Az $x-3$ lehetséges értékei:

$$x-3 = \begin{cases} 1 \\ -1 \\ 3 \\ -3 \\ 9 \\ -9 \end{cases}, \text{ amiből } x = \begin{cases} 4 \\ 2 \\ 6 \\ 0 \text{ (kizárt)} \\ 12 \\ -6 \end{cases} \text{ és } y = \begin{cases} 12 \\ -6 \\ 6 \\ - \\ 4 \\ 2 \end{cases}$$

Az egyenletet a következő számpárok elégítik ki:

$$(4, 12), (2, -6), (6, 6), (-6, 2) \text{ és } (12, 4).$$

2. Oldd meg a következő egyenlőtlenséget:

$$(1+x)^2 < \sqrt{(1-x^2)^2}.$$

Megoldás. A megoldandó egyenlőtlenség a következő alakba írható:

$$(1+x)^2 < |1-x^2|.$$

Mivel $1-x^2 \geq 0$ pontosan akkor, ha $-1 \leq x \leq 1$ és $1-x^2 < 0$, ha $x < -1$ vagy $x > 1$, ezért két esetet különböztetünk meg.

Ha $-1 \leq x \leq 1$, akkor az egyenlőtlenség a következő alakú:

$$(1+x)^2 < 1-x^2, \text{ amiből } x+x^2 < 0$$

egyenlőtlenség adódik. Ez pontosan akkor teljesül, ha $-1 < x < 0$. A kapott x értékek a feltételnek megfelelnek, tehát minden $-1 < x < 0$ megoldás.

Ha $x < -1$ vagy $x > 1$, akkor az $(1+x)^2 < x^2 - 1$ egyenlőtlenséget kell megoldani, ami egyenértékű a következővel: $2x < -2$, azaz $x < -1$. A kapott x értékek mind megfelelnek a feltételnek.

Összefoglalva, az egyenlőtlenségnek minden olyan x valós szám megoldása, amelyre $-1 < x < 0$ vagy $x < -1$, ami úgy is felírható, hogy $x < 0$, de $x \neq 1$.

3. Adott területű derékszögű háromszögek közül melyiknek legkisebb az átfogója?

I.Megoldás. Jelölje T annak a derékszögű háromszögnek a területét, amelynek a befogói a és b , átfogója pedig c . Ekkor

$$T = \frac{a \cdot b}{2}, \text{ a Pitagorasz tételből pedig } c^2 = a^2 + b^2.$$

A c átfogó minimumát keressük. Nyilvánvaló, hogy $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ pontosan ott minimális, ahol $a^2 = a^2 + b^2$. Felhasználva a $T = \frac{a \cdot b}{2}$ összefüggést adódik, hogy

$$c^2 = a^2 + \frac{4T^2}{a^2} = \left(a - \frac{2T}{a}\right)^2 + 4T.$$

Ez az összeg pontosan akkor minimális, ha

$$a - \frac{2T}{a} = 0, \text{ azaz ha } a = \frac{2T}{a}, \text{ azaz } a^2 = 2T, \text{ így } b^2 = 2T.$$

Megállapíthatjuk, hogy az átfogó akkor a legkisebb, amikor a derékszögű háromszög egyenlőszárú. Ekkor az átfogó

$$c = 2\sqrt{T}.$$

II.Megoldás. Jelölje α az a befogóval szemben fekvő szöget. Mivel $a = c \sin \alpha$ és $b = c \cos \alpha$, ezért

$$T = \frac{c^2 \sin \alpha \cos \alpha}{2}, \text{ ahonnan } \frac{2T}{\sin \alpha \cos \alpha} = c^2, \text{ azaz } c^2 = \frac{4T}{\sin 2\alpha}.$$

Ez a hányados pontosan akkor minimális, ha $\sin 2\alpha = 1$ (hiszen a számláló konstans), ahol $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Az adott intervallumban $\sin 2\alpha = 1$ pontosan akkor teljesül, ha

$$2\alpha = \frac{\pi}{2}, \text{ azaz } \alpha = \frac{\pi}{4}. \text{ Ekkor viszont a derékszögű háromszög egyenlő szárú és}$$

$$c = 2\sqrt{T}.$$

4. Igaz-e, hogy

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = 1?$$

I.Megoldás. Legyen $a = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$. Kísérjük meg a köbgyökös kifejezés alatt teljes köbök kialakítását. Végezzük el a következő átalakításokat:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16-8\sqrt{5}} \right) = \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{1+3\sqrt{5}+15+5\sqrt{5}} + \sqrt[3]{1-3\sqrt{5}+15-5\sqrt{5}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{(1+\sqrt{5})^3} + \sqrt[3]{(1-\sqrt{5})^3} \right) = \frac{1}{2} (1+\sqrt{5}+1-\sqrt{5}) = 1. \end{aligned}$$

II.Megoldás. Most próbáljuk meg köbreemeléssel megoldani a feladatot.

$$\begin{aligned} a^3 &= 2 + \sqrt{5} + 3\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})^2(2-\sqrt{5})} + 3\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})^2} + 2 - \sqrt{5} = \\ &= 4 - 3 \left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} \right) = 4 - 3a, \end{aligned}$$

mert $3\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})} = 3\sqrt[3]{4-5} = -3$. Feladatunk a továbbiakban az $a^3 = 4 - 3a$ egyenlet megoldása. Írjuk át az egyenletet az $a^3 + 3a - 4 = 0$ alakba, majd a baloldalt alakítsuk szorzattá:

$$\begin{aligned} a^3 + 3a - 4 &= a^3 - a + 4a - 4 = a(a^2 - 1) + 4(a - 1) = \\ &= a(a - 1)(a + 1) + 4(a - 1) = (a - 1)(a^2 + a + 4) \end{aligned}$$

A megoldandó egyenlet tehát

$$(a - 1)(a^2 + a + 4) = 0.$$

Ez a reláció pontosan akkor teljesül, ha $a - 1 = 0$, azaz $a = 1$, ugyanis

$$a^2 + a + 4 = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4},$$

amiből látszik, hogy az $a^2 + a + 4 = 0$ egyenlet egyetlen valós a -ra sem teljesül. Ezért a $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ számkifejezés értéke valóban 1.

5. Egy háromszög szögeinek mértékei számtani sorozatot alkotnak. Határozd meg ezeknek a szögeknek a mértékét külön-külön, ha tudjuk, hogy színuszaik összege

$$\frac{3+\sqrt{3}}{2}.$$

Megoldás. Legyenek α , β és γ a háromszög szögei. Ha e szögek mértékei számtani sorozatot alkotnak, akkor valamely φ szögre

$$\beta - \varphi + \beta + \beta + \varphi = 180^\circ, \text{ azaz } \beta = 60^\circ.$$

A háromszög szögei tehát $\alpha = 60^\circ - \varphi$, $\beta = 60^\circ$ és $\gamma = 60^\circ + \varphi$.

Írjuk most fel a szögek színuszainak összegét:

$$\sin(60^\circ - \varphi) + \sin 60^\circ + \sin(60^\circ + \varphi) = \frac{3+\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin 60^\circ \cos \varphi - \cos 60^\circ \sin \varphi + \sin 60^\circ + \sin 60^\circ \cos \varphi + \cos 60^\circ \sin \varphi = \frac{3+\sqrt{3}}{2},$$

$$2 \sin 60^\circ \cos \varphi + \sin 60^\circ = \frac{3+\sqrt{3}}{2},$$

$$2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3+\sqrt{3}}{2},$$

innen pedig $2\sqrt{3} \cos \varphi = 3$, azaz $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, tehát $\varphi = 30^\circ$.

A háromszög keresett szögei: $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.

11. évfolyam

1. Oldd meg a következő egyenletet:

$$4^x + 9^x + 25^x = 6^x + 10^x + 15^x.$$

Megoldás. Alakítsuk át az egyenletet a következő módon:

$$(2^x)^2 + (3^x)^2 + (5^x)^2 = 2^x \cdot 3^x + 2^x \cdot 5^x + 3^x \cdot 5^x,$$

majd szorozzuk be 2-vel. Átalakítás után a következő egyenlethez jutunk:

$$(2^x - 3^x)^2 + (3^x - 5^x)^2 + (5^x - 2^x)^2 = 0.$$

Ebből következik, hogy $2^x = 3^x = 5^x$ kell hogy teljesüljön, azaz $x = 0$.

2. Bizonyítsd be, hogy ha a , b és c egy háromszög oldalhosszúságai, akkor

$$abc > (a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c).$$

Megoldás. Mivel az egyenlőtlenség mindkét oldalán szereplő tényezők mindegyike pozitív, így a bizonyítandó egyenlőtlenség egyenértékű a következő egyenlőtlenséggel: $a^2b^2c^2 > (a+b-c)^2(a-b+c)^2(-a+b+c)^2$.

A jobb oldalon álló szorzat tényezőit csoportosítsuk a következő módon:

$$\begin{aligned} & (a+b-c)^2(a-b+c)^2(-a+b+c)^2 = \\ & = [a+(b-c)][a-(b-c)][b-(a-c)][b+(a-c)][c-(b-a)][c+(b-a)] = \\ & = [a^2-(b-c)^2][b^2-(a-c)^2][c^2-(b-a)^2]. \end{aligned}$$

Mivel $a^2-(b-c)^2 \leq a^2$, $b^2-(a-c)^2 \leq b^2$ és $c^2-(b-a)^2 \leq c^2$, ezért

$$a^2b^2c^2 > (a+b-c)^2(a-b+c)^2(-a+b+c)^2$$

teljesül, s ezzel állításunkat bizonyítottuk.

3. Igazold, hogy minden valós x értékre teljesül a következő reláció:

$$x^4 + 1 \geq 2x(x^2 - x + 1).$$

Megoldás. Beszorzás és rendezés után adódik $x^4 + 1 \geq 2x^3 - 2x^2 + 2x$, amiből $x^4 + 2x^2 + 1 \geq 2x^3 + 2x$ következik. A bal oldalon teljes négyzet áll, a jobb oldalon kiemelés után a következőt kapjuk: $(x^2 + 1)^2 \geq 2x(x^2 + 1)$.

Mivel $x^2 + 1 > 0$, ezért a kapott egyenlőtlenség egyenértékű az $x^2 + 1 \geq 2x$ egyenlőtlenséggel, amiből az $(x-1)^2 \geq 0$ egyenlőtlenséget kapjuk, ami minden valós x -re teljesül, így az eredeti egyenlőtlenségnek is minden valós x megoldása.

4. A Pitagorasz tétel szerint, bármely derékszögű háromszög befogóira rajzolt négyzetek területének összege egyenlő az átfogóra rajzolt négyzet területével. Igaz-e a tétel következő általánosítása: bármely derékszögű háromszög befogóira rajzolt szabályos n -szögek ($n \geq 3$) területének összege egyenlő az átfogóra rajzolt szabályos n -szög területével.

Megoldás. $n = 4$ -re az állítás igaz (Pitagorasz tétel). Vajon igaz-e az állítás $n = 3$ -ra? Rajzoljunk a derékszögű háromszög oldalai fölé szabályos háromszögeket. Az egyes háromszögek területei:

$$T_a = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}, T_b = \frac{b^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \text{ és } T_c = \frac{c^2 \cdot \sqrt{3}}{4}.$$

Azt kell eldönteni, hogy igaz-e az $\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + \frac{b^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{c^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$ egyenlőség. $\frac{4}{\sqrt{3}}$ -mal

szorozva mindkét oldalt megkapjuk az $a^2 + b^2 = c^2$ ekvivalens egyenlőséget, vagyis a Pitagorasz tételt, amiről tudjuk, hogy igaz, ezért $T_a + T_b = T_c$ is igaz.

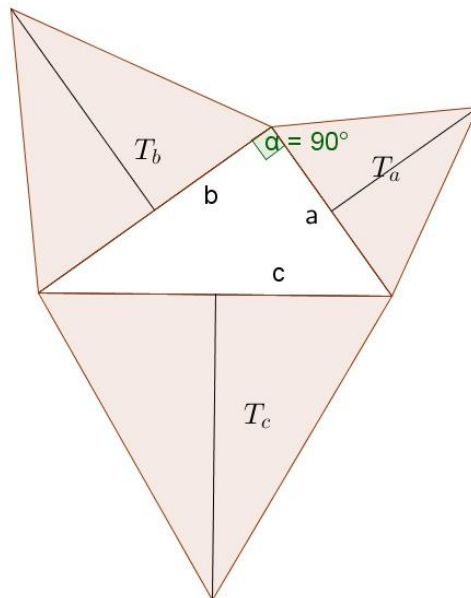
Legyen ezután $n \geq 5$ tetszőleges. Jelölje továbbra is T_a , T_b és T_c az a , b és c oldalak fölé rajzolt szabályos n -szögek területét. Tudjuk, hogy a szabályos n -szögek páronként hasonlóak. Jelöljük a T_c és c^2 arányát η -val, azaz $\eta = \frac{T_c}{c^2} \neq 0$. Az η tehát azt mutatja meg, hogy a c átfogóra rajzolt szabályos n -szög területe hányszorosa az átfogóra rajzolt négyzet területének, vagyis $T_c = \eta \cdot c^2$.

Megmutatjuk, hogy igazak a $T_a = \eta \cdot a^2$ és $T_b = \eta \cdot b^2$ relációk is. Mivel $\frac{T_a}{T_c} = \left(\frac{a}{c}\right)^2$, azaz a területek aránya egyenlő a megfelelő oldalak arányának négyzetével, ezért

$$T_a = T_c \left(\frac{a}{c}\right)^2 = \eta \cdot c^2 \cdot \frac{a^2}{c^2} = \eta \cdot a^2.$$

Hasonlóan $\frac{T_b}{T_c} = \left(\frac{b}{c}\right)^2$, ahonnan $T_b = T_c \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \eta \cdot c^2 \cdot \frac{b^2}{c^2} = \eta \cdot b^2$.

Azt akarjuk eldönteni, hogy igaz-e a $T_a + T_b = T_c$ reláció, azaz $\eta a^2 + \eta b^2 = \eta c^2$. Ez az egyenlőség egyenértékű az $a^2 + b^2 = c^2$ relációval (hiszen egymásból $\eta \neq 0$ -val való osztással/szorzással állnak elő). Mivel $a^2 + b^2 = c^2$ igaz, ezért $\eta a^2 + \eta b^2 = \eta c^2$ is igaz.



5. Az $ABCD A'B'C'D'$ egységnyi élű kocka AC' testátlójának mely P pontjára teljesül, hogy $\angle APC = 60^\circ$?

Megoldás. Ismert, hogy az egységnyi élű kocka lapátlója $\sqrt{2}$, testátlója pedig $\sqrt{3}$. Jelölje y a keresett P pontnak az A csúctól, x pedig a C csúctól való távolságát. Legyen $\angle PAC = \varphi$. Célunk az y szakasz hosszának meghatározása.

Írjuk fel először az ACP háromszögre a szinusztételt:

$$\frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{\sin \varphi}{\sin 60^\circ}, \text{ innen } x = \frac{\sqrt{2} \sin \varphi}{\sin 60^\circ} = \frac{2\sqrt{2} \sin \varphi}{\sqrt{3}}.$$

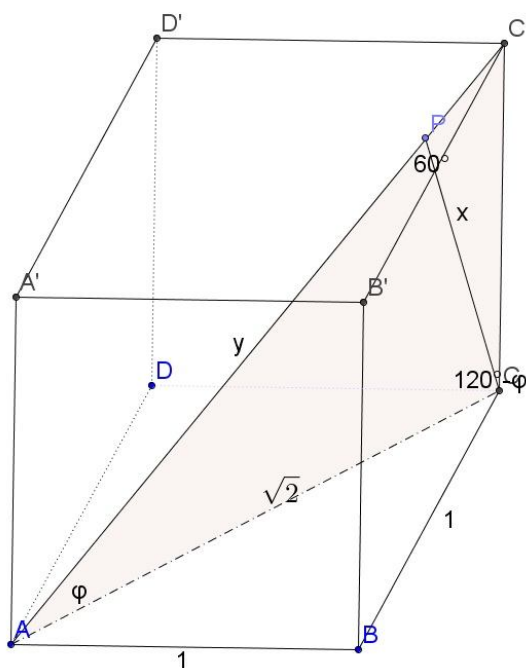
Mivel az ACC' háromszögből $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$ és $\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, ezért $x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Ezek után írjuk fel az ACP háromszögben a keresett y szakaszra a koszinusztételt:

$$y^2 = x^2 + (\sqrt{2})^2 - 2x\sqrt{2} \cos(120^\circ - \varphi) = \frac{8}{9} + 2 - \frac{8}{3}(\cos 120^\circ \cos \varphi + \sin 120^\circ \sin \varphi).$$

$$y^2 = \frac{26}{9} - \frac{8}{3} \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{26}{9} - \frac{8}{3} \cdot \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{52\sqrt{3} - 24\sqrt{3} + 24\sqrt{2}}{18\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{14\sqrt{3} + 12\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}, \text{ ahonnan } y = \sqrt{\frac{14\sqrt{3} + 12\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}} \approx 1,626.$$



12. évfolyam

1. Oldd meg a következő egyenletet a nemnegatív egész számok halmazán:

$$x^{y+1} = (x+1)^y.$$

Megoldás. Ha $x = 0$, akkor $x^{y+1} = 0$ bármely nemnegatív egész számra, ugyanakkor $(x+1)^y = 1$. Így az $x = 0$ esetre nincs megoldás.

Ha $x = 1$, akkor $x^{y+1} = 1$, bármely y nemnegatív egész számra, ugyanakkor $2^y = 1$ pontosan akkor, ha $y = 0$. Tehát az $(1, 0)$ számpár megoldása az egyenletnek.

Ha $x \geq 2$ és x páros, akkor x^{y+1} is páros, ugyanakkor $(x+1)^y$ páratlan bármely y nemnegatív egész szám esetén, ezért $x^{y+1} \neq (x+1)^y$. Ha x páratlan, akkor x^{y+1} is páratlan és $(x+1)^y$ páros bármely y nemnegatív egész számra, ezért $x^{y+1} \neq (x+1)^y$. Az egyenletet tehát egyetlen nemnegatív egész számokból álló páros elégíti ki:

$$x = 1, y = 0.$$

2. Igazold, hogy bármely négyzetszámot 16-tal osztva négyzetszámot kapunk maradékul!

Megoldás. Először lássuk be a páros számok négyzeteire, majd később belátjuk a páratlanokéra is.

A páros számok a 4-gyel való oszthatóság szempontjából felírhatók $4k$ és $4k+2$ alakban (ahol k egész szám). A $4k$ alakú páros számok négyzete

$$(4k)^2 = 16k^2.$$

Ez a négyzetszám 16-tal osztva 0-át ad maradékul, ami négyzetszám. A $4k+2$ alakú számok négyzete

$$(4k+2)^2 = 16k^2 + 16k + 4 = 16(k^2 + k) + 4,$$

amely alakból látszik, hogy a négyzetszám 16-tal osztva 4-et ad maradékul, ami négyzetszám.

Most vegyük sorra a páratlan számokat, mégpedig először a $8k \pm 1$, majd a $8k \pm 3$ alakúakat.

$$(8k \pm 1)^2 = 64k^2 \pm 16k + 1 = 16(4k^2 \pm k) + 1$$

$$(8k \pm 3)^2 = 64k^2 \pm 48k + 9 = 16(4k^2 \pm 3k) + 9.$$

A két alakról megállapítható, hogy 16-tal osztva 1-et, illetve 9-et adnak maradékul, amelyek négyzetszámok. Ezzel minden szám négyzetére bebizonyítottuk az állítást.

3. Határozd meg az f függvény szélsőértékeit, ha

$$f(x) = \frac{2x^2 + 6x + 6}{x^2 + 4x + 5}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

I.Megoldás. Vezessük be az $f(x) = y$ jelölést. Mivel az f függvény minden valós

számra értelmezett, ezért az $y = \frac{2x^2 + 6x + 6}{x^2 + 4x + 5}$ egyenlet ekvivalens az

$$yx^2 + 4yx + 5y = 2x^2 + 6x + 6, \text{ illetve } (y-2)x^2 + (4y-6)x + 5y-6 = 0$$

egyenlettel. Ki kell vizsgálni, hogy milyen y értékek esetén van megoldása a kapott egyenletnek, majd meg kell határozni a legkisebb és a legnagyobb y értéket, ha ilyenek léteznek.

$y = 2$ esetén az egyenlet elsőfokú, azaz $2x + 4 = 0$, amiből $x = -2$.

Ha $y = 2$, akkor az egyenlet akkor és csak akkor oldható meg, ha a diszkrimináns nemnegatív, azaz

$$-(4y - 6)^2 - 4(y - 2)(5y - 6) \geq 0,$$

$$-4y^2 + 16y - 12 \geq 0,$$

$$-4(y^2 - 4y + 3) \geq 0,$$

$$-4(y - 1)(y - 3) \geq 0,$$

Amiből következik, hogy $1 \leq y \leq 3$, tehát a függvény minimuma 1, maximuma 3.

II. Megoldás. Alakítsuk át a függvényt a következő módon:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 6x + 6}{x^2 + 4x + 5} = \frac{x^2 + 4x + 5 + x^2 + 2x + 1}{x^2 + 4x + 5} = 1 + \frac{(x+1)^2}{(x+2)^2 + 1}.$$

Ez a kifejezés biztosan nem kisebb 1-nél. Egyenlőség $x = -1$ esetén van, ami azt jelenti, hogy ezen a helyen lesz a függvénynek minimuma, amelynek értéke 1.

Hasonló átalakítással jutunk a függvény maximumához is. Mégpedig így:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 6x + 6}{x^2 + 4x + 5} = \frac{3x^2 + 12x + 15 - (x^2 + 6x + 9)}{x^2 + 4x + 5} = 3 - \frac{(x+3)^2}{(x+2)^2 + 1} \leq 3.$$

Egyenlőség $x = -3$ esetén van, ami azt jelenti, hogy ezen a helyen lesz a függvénynek maximuma, amelynek értéke 3.

4. Adott a síkban n egyenes. Legalább, illetve legfeljebb hány részre osztja fel a síkot az n egyenes?

Megoldás. Nyilvánvaló, hogy $n = 1$ esetben a részek száma $t = 2$.

Ha $n = 2$, akkor már két eset lehetséges. A továbbiakban mindig feltételezzük, hogy az egyenesek között nincsenek olyanok, amelyek egybeesnek.

Ha a két egyenes párhuzamos, akkor a részek száma $t = 3$, ha a két egyenes metsző, akkor a részek száma $t = 4$.

Ha $n = 3$, akkor a helyzet már kicsit összetettebb. Három párhuzamos egyenes esetén a részek száma $t = 4$, két párhuzamos és egy metsző egyenes esetén $t = 6$, három egy ponton áthaladó egyenes esetén $t = 6$, valamint három egymást metsző egyenes esetén, amelyek között nincs párhuzamos és amelyek nem egy közös ponton haladnak keresztül, $t = 7$.

A konkrét esetek tanulmányozása alapján világos, hogy adott n egyenes esetén a részek száma pontosan akkor minimális, ha az egyenesek párhuzamosak. Ekkor a részek száma $t_{\min} = n + 1$. Az is világos, hogy a részek száma adott n egyenes esetén akkor maximális, ha az egyenesek között bármelyik kettő nem párhuzamos és nincs közöttük három olyan, amely egy ponton megy át. Ezután alkalmas számlálástechnikát kell konstruálni a maximumok összeszámlálására. Legyen az egyenesek száma n , a maximális részek száma ekkor

$$t_{\max} = 2 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

5. Bizonyítsd be, hogy ha a háromszög S súlypontján és beírható körének O középpontján áthaladó egyenes párhuzamos a háromszög valamely oldalával, akkor a háromszög oldalainak mérőszámai számtani sorozatot alkotnak!

Megoldás. Bármely háromszög beírható körének r sugara kifejezhető a háromszög területe és kerülete segítségével, azaz

$$r = \frac{2T}{K}.$$

Ha az S és O pontokon átmenő e egyenes párhuzamos a háromszög a oldalával, akkor a súlypont tulajdonságai miatt a háromszög beírható körének r sugara az a oldalhoz tartozó m_a magasság harmada:

$$r = \frac{m_a}{3}.$$

Az r sugár e két kifejezését egybevetve, és felhasználva hogy

$$m_a = \frac{2T}{a},$$

kapjuk, hogy

$$\frac{2T}{a+b+c} = \frac{2T}{3a},$$

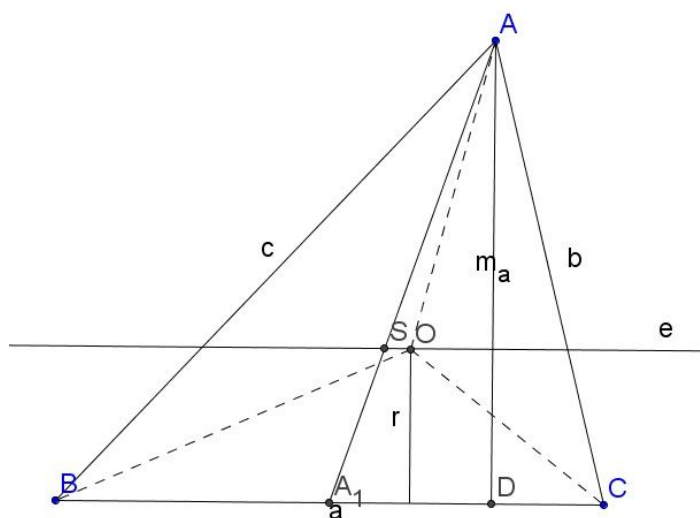
innen pedig

$$a+b+c = 3a,$$

azaz

$$\frac{b+c}{2} = a.$$

A háromszög oldalai tehát tényleg számtani sorozatot alkotnak, mégpedig az az oldal a sorozat középső eleme, amellyel az e egyenes párhuzamos.



A II. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY DÍJAZOTTJAI

9. évfolyam

1. Csizmadija Laura, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **I. díj**
2. Gombár Tamás, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
3. Juhász Andor, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
4. Lajkó Miklós, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
5. Fontányi Andor, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
6. Grujin Tamara, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
7. Kalmár Gergely, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
8. Seregély Emese, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**

10. évfolyam

1. Csizmadia Zsolt, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
2. Döme Zsolt, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
3. Lakatos Zoltán, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **I. díj**
4. Borbás Imre, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
5. Takács Árpád, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **II. díj**
6. Karácsonyi Éva, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
7. Szegedi Mihály, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **II. díj**
8. Botos Zsófia, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
9. Varga Dávid, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **III. díj**
10. Dósa Szilvia, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**

11. évfolyam

1. Sóti Valentin, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **I. díj**
2. Oláh Attila, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **II. díj**
3. Holló Dóra, Dositej Obradović Gimnázium, Topolya, **III. díj**

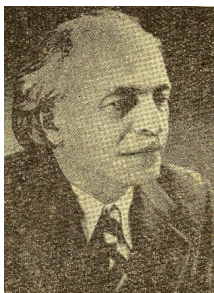
A III. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Előadó: dr. Karsai János

Előadás címe: Számítógéppel szerkesztett matematikai virágok



A tanulók érdeklődéssel hallgatják az előadást.



III. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Szabadka, 2006. január 21.

9. évfolyam

1. Jelentse a , b és c egy háromszög oldalainak a hosszát. Bizonyítsd be, hogy fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 4abc > a^3 + b^3 + c^3.$$

2. Három iskola mindegyikében n tanuló van. Minden tanuló a másik két iskolából együttvéve $n+1$ tanulót ismer. Bizonyítsd be, hogy választható a három iskola mindegyikéből egy-egy tanuló úgy, hogy mindegyikük ismeri a másik kettőt. (Az ismeretségeket kölcsönösnek tételezzük fel.)

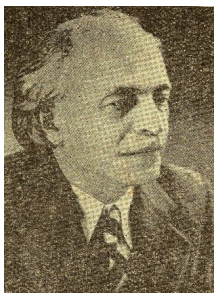
3. Az ABC háromszög C csúcsból induló súlyvonala az AB oldalt C_1 -ben, a háromszög köré írható körét C_2 -ben, a B csúcsból induló súlyvonal az AC oldalt B_1 -ben, a köré írható kört B_2 -ben metszi. Bizonyítsd be, hogy ha e két súlyvonal merőleges egymásra, akkor C_2B_2 merőleges AS -re, ahol S a háromszög súlypontja!

4. Keresd meg a legkisebb olyan természetes számot, ami 56-ra végződik, osztható 56-tal, és számjegyeinek összege éppen 56.

5. Bizonyítsd be, hogy ha az a , b és c egész számokra teljesül az $ab + bc + ca = 0$ összefüggés, akkor az abc szorzat fölírható egy négyzetszám és egy köbszám szorzataként!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



III. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Szabadka, 2006. január 21.

10. évfolyam

1. Mely egész a , b és c értékek elégítik ki az

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 < ab + 3b + 2c$$

egyenlőtlenséget?

2. Legyen n egész szám. Bizonyítsd be, hogy ha $2 + 2\sqrt{28n^2 + 1}$ egész szám, akkor négyzetszám is!

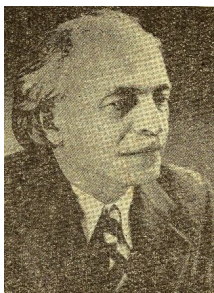
3. Bizonyítsd be, hogy ha p 5-nél nagyobb prímszám, akkor az $x^4 + 4^x = p$ egyenletnek nincs egész megoldása!

4. Az ABC háromszögben $\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$. Legyen D a C -ből induló szögfelező AB oldalhoz tartozó pontja, O pedig a háromszög köré írható körének középpontja. Mekkora a háromszög szögei, ha $ODAC$ húrnégyszög?

5. Inflációban gyakran emelik a villamos közlekedési díját. A jegy árát ilyenkor a jegy nélkül utazókra kirótt büntetés mértékére emelik, a büntetés pedig mindig az éppen érvényes jegy árának 10-szerese. Makacs Tamás elvi kérdést csinál abból, hogy ne vegyen jegyet, így már 9-szer büntették meg. Ráadásul az egyik alkalommal fizetés közben elejtett, és így elvesztett egy „nagy értékű” bankót. Így Tamásnak eddig 23650 Ft-ja ment rá a villamosozásra. Hány Ft-os bankót vesztett el Tamás? (Inflációban a „nagy értékű” bankók az 1000, 2000, 5000 és a 10000 Ft-osak.)

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



III. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Szabadka, 2006. január 21.

11. évfolyam

1. Két egybevágó, háromoldalú szabályos gúlát alapjuk mentén összeillesztettünk. A keletkező hatlapú test minden lapszöge ugyanakkora. Határozd meg a két háromélű csúcs távolságának és két oldalcsúcs távolságának az arányát!

2. Jelentse a , b és c egy háromszög oldalainak a hosszát. Bizonyítsd be, hogy fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 4abc > a^3 + b^3 + c^3.$$

3. Egy sakktábla minden mezejére kockát helyeztünk. Ezek lapjai a mezőkkel egybevágóak. Minden kockának van fekete lapja. Azt akarjuk elérni, hogy fölül csak fekete lapok legyenek. Bizonyítsd be, hogy ezt el lehet érni, ha kockát csak úgy mozgathatunk el, hogy teljes sorával vagy oszlopával elforgatjuk annak hossz tengelye körül!

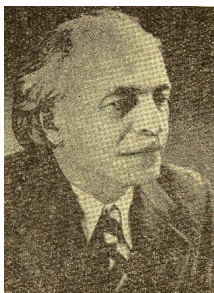
4. Bizonyítsd be, hogy ha p 5-nél nagyobb prímszám, akkor az $x^4 + 4^x = p$ egyenletnek nincs egész megoldása!

5. Bizonyítsd be, hogy az $A_1A_2A_3 \dots A_{12}$ szabályos tizenkétszögben

$$\frac{1}{|A_1A_2|^2} + \frac{1}{|A_1A_6|^2} = \frac{4}{|A_1A_3|^2}.$$

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



III. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Szabadka, 2006. január 21.

12. évfolyam

1. Bizonyítsd be, hogy ha n természetes szám, akkor $(5 + \sqrt{26})^n$ tizedestört alakjában a tizedesvesszőt követő első n számjegy egyenlő!

2. Egy könyvtár ki- és bejáratánál egy-egy tábla áll. Minden be-, illetve kilépőnek fel kell írnia a megfelelő táblára, hogy hány embert talált, illetve hagyott a könyvtárban. Bizonyítsd be, hogy egy teljes nap során ugyanazok a számok kerülnek a két táblára, legfeljebb más sorrendben (feltesszük, hogy egyszerre csak egy ember érkezik vagy távozik).

3. Milyen n és k természetes számok esetén alkot számtani sorozatot a következő három kifejezés:

$$\binom{n}{k-1}, \binom{n}{k}, \binom{n}{k+1}.$$

4. Adott négyzeteknek egy végtelen sorozata, ahol az oldalak hossza rendre $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$. Bizonyítsd be, hogy van olyan négyzet, amelyben mindezek a négyzetek átfedés nélkül elhelyezhetők, és keresd meg a legkisebb ilyen négyzetet!

5. Az ABC háromszög B és C csúcsain átmenő kör az AB oldalt D pontban, az AC oldalt pedig E pontban metszi. A háromszög AF súlyvonala DE -t G pontban metszi. Bizonyítsd be, hogy ekkor

$$\frac{|GD|}{|GE|} = \frac{|AC|^2}{|AB|^2}.$$

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

A III. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI

9. évfolyam

1. Jelentse a , b és c egy háromszög oldalainak a hosszát. Bizonyítsd be, hogy fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 4abc > a^3 + b^3 + c^3.$$

Megoldás. Rendezzük a bal oldalt, a jobboldalon szereplő kifejezéseket vigyük át az egyenlőtlenség bal oldalára, majd alakítsuk át a kifejezést!

$$ab^2 - 2abc + ac^2 + bc^2 - 2abc + ba^2 + ca^2 - 2abc + cb^2 + 4abc - a^3 - b^3 - c^3 > 0$$

$$ab^2 + ac^2 + bc^2 + ba^2 + ca^2 + cb^2 - 2abc - a^3 - b^3 - c^3 > 0$$

$$b(a^2 - c^2 + 2bc - b^2) + c(a^2 - c^2 + 2bc - b^2) - a(a^2 - c^2 + 2bc - b^2) > 0$$

$$(b+c-a)(a^2 - c^2 + 2bc - b^2) > 0$$

$$(b+c-a)(a^2 - (c-b)^2) > 0$$

$$(b+c-a)(a-c+b)(a+c-b) > 0$$

A háromszög-egyenlőtlenségek alapján mindhárom tényező pozitív, azaz igaz egyenlőtlenséget kaptunk.

2. Három iskola mindegyikében n tanuló van. Minden tanuló a másik két iskolából együttvéve $n+1$ tanulót ismer. Bizonyítsd be, hogy választható a három iskola mindegyikéből egy-egy tanuló úgy, hogy mindegyikük ismeri a másik kettőt. (Az ismeretségeket kölcsönösnek tételezzük fel.)

Megoldás. Megkérdezzük mindenkit, hány ismerőse van egy-egy iskolában. Legyen a legkisebb hallott szám k . Ez nem 0, mert mindenkinek több ismerőse van a másik két iskolából, mint ahány tanuló jár egy-egy iskolába.

Legyen mondjuk András az A iskolából egy tanuló, akinek k ismerőse van a B iskolában. Ekkor a C iskolában $n+1-k$ ismerőse van és $k-1$ tanulót nem ismer.

András egy B iskolabeli ismerőse, mondjuk Bálint, legalább k tanulót ismer a C iskolából. Ezek közül legalább egy ismeri Andrást is. Ha Csongor egy közös ismerős, akkor hármuk közül mindenki ismeri a másik kettőt. A feladat állítása tehát igaz.

3. Az ABC háromszög C csúcsból induló súlyvonala az AB oldalt C_1 -ben, a háromszög köré írható körét C_2 -ben, a B csúcsból induló súlyvonal az AC oldalt B_1 -ben, a köré írható kört B_2 -ben metszi. Bizonyítsd be, hogy ha e két súlyvonal merőleges egymásra, akkor C_2B_2 merőleges AS -re, ahol S a háromszög súlypontja!

Megoldás. Használjuk az ábra jelöléseit. Legyen $\varphi = C_1CB\angle$. A C_1B_1 szakasz az ABC háromszögnek egy középvonala, ezért C_1B_1 párhuzamos BC -vel. Ebből az is következik, hogy az ABC háromszög AA_1 súlyvonalának C_1B_1 -gyel alkotott E

metszéspontja felezi a C_1B_1 szakaszt. Ezek szerint C_1SB_1 derékszögű háromszögnek SE az átfogóhoz tartozó súlyvonala, amiről tudjuk – Thálész tétele miatt – hogy egyenlő az átfogó felével.

$$|SE| = |C_1E| = |EB_1|.$$

Ez viszont azt jelenti, hogy a C_1ES háromszög egyenlő szárú, vagyis

$$\angle EC_1S = \angle SCB_1 = \angle ESC_1 = \varphi.$$

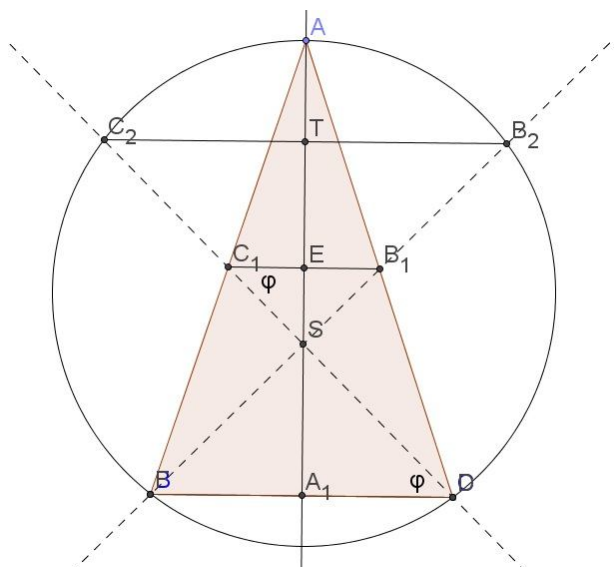
Vizsgáljuk most a C_2B_2S derékszögű háromszöget. Nyilván $\angle C_2B_2S = \varphi$, hiszen a $\angle C_2B_2B_1$ és $\angle C_2CB_1$ azonos íven nyugvó kerületi szögek. Mivel $\angle C_2ST = \varphi$, ezért

$$\angle TSB_2 = 90^\circ - \varphi,$$

ami azt jelenti, hogy a B_2TS háromszögben

$$\angle B_2TS = 90^\circ,$$

vagyis AS merőleges C_2B_2 -re, és éppen ezt kellett igazolnunk.



4. Keresd meg a legkisebb olyan természetes számot, ami 56-ra végződik, osztható 56-tal, és számjegyeinek összege éppen 56.

Megoldás. A keresett szám felírható $A \cdot 100 + 56$ alakban. Mivel $56 | A \cdot 100$, így $14 | A$, azaz A páros szám és osztható 7-tel, számjegyeinek összege pedig $56 - (5 + 6) = 45$. A legkisebb olyan páros szám, ahol a számjegyek összege 45 a 199998, de ez nem osztható 7-tel. A következő a 289998, majd a 298998. Ez utóbbi osztható csak 7-tel, tehát a keresett szám a 29899856.

5. Bizonyítsd be, hogy ha az a , b és c egész számokra teljesül az $ab + bc + ca = 0$ összefüggés, akkor az abc szorzat fölírható egy négyzetszám és egy köbszám szorzataként!

Megoldás. Vegyük észre, hogy $ab = -c(b + a)$ miatt, az a , b és c számok mindegyike osztja a másik két számot, ezért ebből az következik, hogy ha az abc szorzat osztható egy p egész számmal, akkor p^n -nel is osztható valamilyen $n > 1$ természetes számra. Ekkor viszont biztosan találhatók olyan x és y nemnegatív egészek, amelyekre $p^n = p^{3x} \cdot p^{2y}$, ami igazolja a feladat állítását.

10. évfolyam

1. Mely egész a , b és c értékek elégítik ki az

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 < ab + 3b + 2c$$

egyenlőtlenséget?

Megoldás. Minthogy az egyenlőtlenség mindkét oldalán egész szám áll, az egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, ha a bal oldal legalább 1-gyel kisebb a jobb oldalnál, így a bal oldalhoz 1-et hozzáadva akár az egyenlőség is teljesülhet, azaz

$$a^2 + b^2 + c^2 + 4 \leq ab + 3b + 2c.$$

Megfelelő rendezéssel a következő egyenlőtlenségeket kapjuk:

$$a^2 - ab + \frac{b^2}{4} + \frac{3b^2}{4} - 3b + 3 + c^2 - 2c + 1 \leq 0$$

$$\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{b}{2} - 1\right)^2 + (c - 1)^2 \leq 0$$

A fenti egyenlőtlenség csak akkor teljesülhet, ha benne minden négyzet alapja 0, hiszen különben a bal oldalon pozitív szám állna. Eszerint

$$a - \frac{b}{2} = 0, \quad \frac{b}{2} - 1 = 0, \quad c - 1 = 0,$$

amelyből az egyetlen megoldás: $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$.

2. Legyen n egész szám. Bizonyítsd be, hogy ha $2 + 2\sqrt{28n^2 + 1}$ egész szám, akkor négyzetszám is!

Megoldás. Legyen $2 + 2\sqrt{28n^2 + 1} = a$. Megfelelő rendezéssel, majd négyzetre emeléssel adódik, hogy

$$2\sqrt{28n^2 + 1} = a - 2, \text{ illetve } 7 \cdot 16n^2 = a(a - 4).$$

A feltétel szerint a egész, ez esetben azonban párosnak kell lennie, sőt 4-gyel oszthatónak is, mert ha páratlan, akkor $a - 4$ is és $a(a - 4)$ is páratlan, ha pedig páratlan szám kétszerese, akkor $a - 4$ is az, s így a szorzat páratlan szám négyszerese, tehát nem osztható 16-tal. Eszerint alkalmas b egész számmal $a = 4b$ és

$$7n^2 = b(b - 1).$$

Itt b és $b - 1$ relatív prím egymáshoz, hiszen minden közös osztójuk osztója a különbségüknek, 1-nek is. Ez esetben egyiküknek négyzetszámnak kell lennie, másikuknak pedig egy négyzetszám 7-szeresének. Ha ugyanis n , b és $b - 1$ helyébe beírjuk felbontásukat prímszámok szorzatára, akkor a bal oldalon a 7 páratlan hatványon fog szerepelni, a többi prímszám páros hatványon.

A jobb oldalon b és $b - 1$ prímosztói különbözőek.

A számelmélet alaptétele szerint egy szám prímtenyezős felbontása a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű, tehát a két oldalon ugyanazok a prímszámok szerepelnek, és egy-egy prím a két oldalon ugyanazon a hatványon fordul elő. Ekkor b és $b - 1$ felbontásában minden prím páros kitevővel szerepel, kivéve a hetet amely fellép valamelyiknek a felbontásában, és pedig páratlan hatványon. A két szám egyike tehát x^2 , a másik $7y^2$ alakú. Mivel b és $b - 1$ egyike páros, másikuk páratlan, így x és y közül is egyik páros, másik páratlan.

Azt is tudjuk, hogy $x^2 - 7y^2$ vagy 1, vagy -1 , továbbá azt is, hogy páros szám négyzete osztható 4-gyel, páratlan számé pedig 4-gyel osztva (sőt 8-cal osztva is) 1-et ad maradékkal. Eszerint, ha $7y^2$ -et 4-gyel osztjuk, akkor 0 vagy 3 a maradék, x^2 -é pedig 1 vagy 0. Mivel továbbá az egyik maradék 0, így az $x^2 - 7y^2$ szám mindkét esetben 1 maradékot kap, tehát nem lehet -1 -gyel, csak 1-gyel egyenlő. Ez azt jelenti, hogy $b = x^2$, $b - 1 = 7y^2$. Ha tehát a feladatban szereplő a szám egész, akkor fennáll rá, hogy $a = 4b = 4x^2 = (2x)^2$, vagyis négyzetszám, amint a feladat állította.

3. Bizonyítsd be, hogy ha p 5-nél nagyobb prímszám, akkor az $x^4 + 4^x = p$ egyenletnek nincs egész megoldása!

Megoldás. Csak pozitív egész x értékek jönnek tekintetbe, mert negatívokra a

$$K = x^4 + 4^x$$

kifejezés nem is egész, 0-ra pedig 1. Pozitív páros x -ekre K osztható 4-gyel, tehát összetett.

Ha x pozitív páratlan szám, akkor $2y + 1$ alakban írva

$$4^x = 4 \cdot 4^{2y} = 4 \cdot (2^y)^4.$$

Írjunk $2^y = 2^{\frac{x-1}{2}}$ helyébe z -t. Ekkor kifejezésünk így alakítható:

$$\begin{aligned} K &= x^4 + 4z^4 = x^4 + 4z^4 + 4x^2z^2 - 4x^2z^2 = (x^2 + 2z^2)^2 - (2xz)^2 = \\ &= (x^2 + 2z^2 + 2xz)(x^2 + 2z^2 - 2xz) = ((x+z)^2 + z^2)((x-z)^2 + z^2). \end{aligned}$$

Itt az első tényező mindig nagyobb, mint 1, mert mindegyik tagja legalább 1. A második tényező pedig csak akkor lehet 1, ha $x = z = 1$. Mivel

$$x = 2y + 1 \text{ és } z = 2^y,$$

így ez abban az esetben következik be, ha $x = 1$ és $y = 0$. Ekkor

$$x^4 + 4^x = 5,$$

p azonban 5-nél nem nagyobb. Így a feladatban szereplő egyenletnek valóban nincs egész megoldása.

4. Az ABC háromszögben $\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$. Legyen D a C -ből induló szögfelező AB

oldalhoz tartozó pontja, O pedig a háromszög köré írható körének középpontja. Mekkora a háromszög szögei, ha $ODAC$ húrnégyszög?

Megoldás. Mivel $\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$, ezért $\gamma = \frac{180^\circ - \gamma}{2}$, ahonnan $\gamma = 60^\circ$. Az AOB háromszögben a kerületi és középponti szögek tétele miatt $AOB\angle = 120^\circ$. Mivel az AOB háromszög egyenlő szárú, így

$$ABO\angle = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$$

Mivel $ACOD$ húrnégyszög, ezért $DCO\angle = OAD\angle$, hiszen azonos íven nyugvó kerületi szögek. Azt kaptuk tehát, hogy $DCO\angle = OAD\angle = 30^\circ$.

A DCO szöget felírhatjuk másképpen is. Az ACO egyenlő szárú háromszögben a

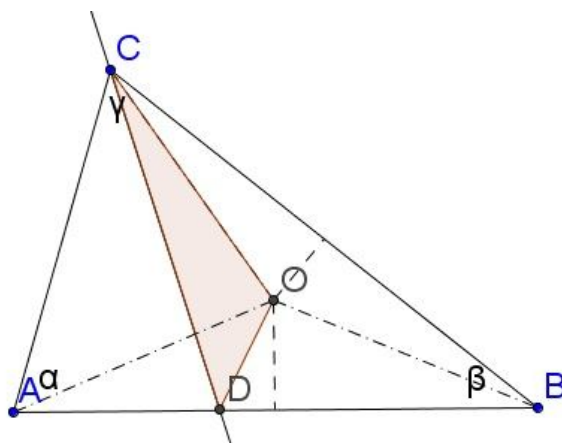
$$COA\angle = 2\beta,$$

ugyancsak a kerületi és középponti szögek tétele miatt. Ezért $ACO\angle = 90^\circ - \beta$. Ekkor

$$DCO\angle = ACO\angle - ACD\angle = 90^\circ - \beta - 30^\circ = 60^\circ - \beta,$$

hiszen CD szögfelező. Így azt kaptuk, hogy $30^\circ = 60^\circ - \beta$, tehát $\beta = 30^\circ$, akkor pedig $\alpha = 90^\circ$. Az ABC háromszög szögei tehát

$$\alpha = 90^\circ, \beta = 30^\circ \text{ és } \gamma = 60^\circ.$$



5. Inflációban gyakran emelik a villamos közlekedési díját. A jegy árát ilyenkor a jegy nélkül utazókra kirótt büntetés mértékére emelik, a büntetés pedig mindig az éppen érvényes jegy árának 10-szerese. Makacs Tamás elvi kérdést csinál abból, hogy ne vegyen jegyet, így már 9-szer büntették meg. Ráadásul az egyik alkalommal fizetés közben elejtett, és így elvesztett egy „nagy értékű” bankót. Így Tamásnak eddig 23650 Ft-ja ment rá a villamosozásra. Hány Ft-os bankót veszített el Tamás? (Inflációban a „nagy értékű” bankók az 1000, 2000, 5000 és a 10000 Ft-osak.)

Megoldás. Egy szám és a tízszerese is kilenccel osztva ugyanazt a maradékot adja. Ezek szerint a villamosjegy és a büntetések is az infláció során ugyanazt a 9-es maradékot adták, illetve Makacs Tamás által kifizetett kilenc büntetés is mindig ugyanazt a maradékot adta. Legyen ez a maradék k ($0 \leq k \leq 8$). Ekkor egy büntetés $9a_i + k$ ($i = 1, 2, \dots, 9$) alakú, a kilenc büntetés összege pedig

$$(9a_1 + k) + (9a_2 + k) + \dots + (9a_9 + k) = 9(a_1 + a_2 + \dots + a_9 + k)$$

alakú, azaz a kifizetett büntetések összege kilenccel osztható szám. A felsorolt nagy értékű bankók közül egyedül a 2000-es egészíti ki a 23 650-et 9-cel osztható számra, tehát Tamás egy 2000-es bankót veszített el.

11. évfolyam

1. Két egybevágó, háromoldalú szabályos gúlát alapjuk mentén összeillesztettünk. A keletkező hatlapú test minden lapszöge ugyanakkora. Határozd meg a két háromélű csúcs távolságának és két oldalcsúcs távolságának az arányát!

Megoldás. Ha a szabályos ABC háromszög mentén összeillesztjük az egybevágó $ABCD$ és $ABCE$ gúlákat, a D és E csúcsok a háromszög síkjára a háromszög S középpontjában emelt merőlegesen helyezkednek el. Az összeillesztéssel keletkező test eszerint nemcsak az ABC síkra, hanem például az ADE síkra is szimmetrikus. E szimmetriákból következik, hogy a D és E csúcsokból az AB élre, illetve a B és C csúcsokból az AD egyenesre bocsátott merőlegesek egyenlők, s hogy közös F , illetve G talppontjuk van. Eszerint a $DFE\angle$ az AB él mentén, a $BGC\angle$ pedig az AD él mentén csatlakozó lapok szögét méri. Minthogy e szögek a feltevés szerint egyenlők, a DFE és BGC háromszögek hasonlóak, hiszen egyenlő szárúak és szárszögük egyenlő. A hasonlóságból a megfelelő oldalak aránya fennáll, azaz

$$|DE| : |BC| = |DF| : |BG|.$$

A jobb oldali szakaszok az ABD háromszög magasságai, s ezért fordítva aránylanak, mint a megfelelő oldalak:

$$|DF| : |BG| = |AD| : |AB|.$$

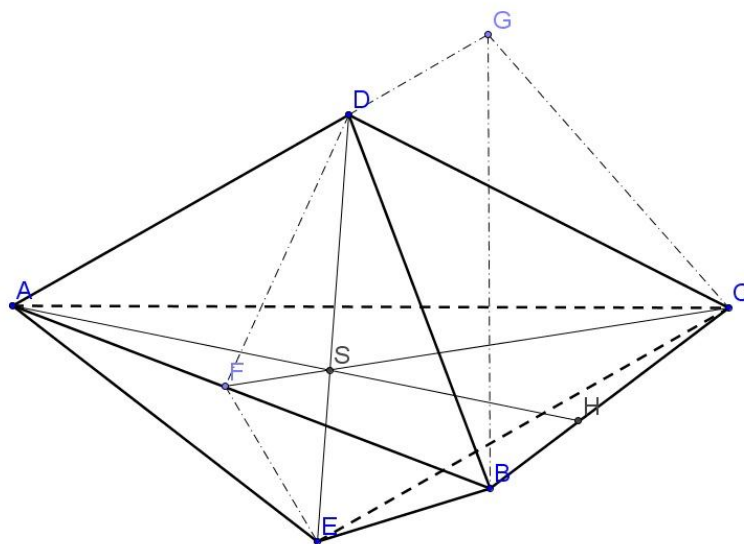
Minthogy $BC = AB$, az aránypárok egybevetéséből $DE = AD$ következik, tehát az is, hogy az ADE háromszög szabályos, és így hasonló az ABC háromszöghöz. Ebből a hasonlóságból az oldalak és magasságok arányára adódik, hogy

$$|DE| : |BC| = |AS| : |AH|.$$

Itt H az A pontból induló magasság talppontja, ami egyben a BC él felezőpontja is.

Minthogy az S súlypont harmadolja az AH súlyvonalat, az utolsó arány értéke $\frac{2}{3}$.

Ez tehát egyben a $|DE| : |BC|$ arány keresett értéke is.



2. Jelentse a , b és c egy háromszög oldalainak a hosszát. Bizonyítsd be, hogy fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 4abc > a^3 + b^3 + c^3.$$

Megoldás. A bal oldal harmadik és negyedik tagja így alakítható át:

$$c(a-b)^2 + 4abc = c(a+b)^2.$$

Vonjuk le ezután a bal oldal egyes tagjaiból a jobb oldal megfelelő tagját, így a különbség szorzattá alakítható:

$$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a+b)^2 - a^3 - b^3 - c^3 > 0$$

$$a((b-c)^2 - a^2) + b((c-a)^2 - b^2) + c((a+b)^2 - c^2) > 0$$

$$a(b-c-a)(b-c+a) + b(c-a-b)(c-a+b) + c(a+b-c)(a+b+c) > 0$$

$$(a+b-c)(ab-ac-a^2-bc+ab-b^2+ac+bc+c^2) > 0$$

$$(a+b-c)(c^2-(a-b)^2) > 0$$

$$(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) > 0$$

Itt mind a három tényező pozitív, mivel egy háromszög két oldalának összege nagyobb a harmadiknál. Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

3. Egy sakktábla minden mezejére kockát helyeztünk. Ezek lapjai a mezőkkel egybevágóak. Minden kockának van fekete lapja. Azt akarjuk elérni, hogy fölül csak fekete lapok legyenek. Bizonyítsd be, hogy ezt el lehet érni, ha kockát csak úgy mozgathatunk el, hogy teljes sorával vagy oszlopával elforgatjuk annak hossz tengelye körül!

Megoldás. Ha egy kockának több fekete lapja van, akkor válasszunk ki közülük egyet, és a többit gondoljuk más színűnek.

Azt használjuk fel, hogy egy tengely körül forgatva az arra merőleges lapok nem változtatják helyüket (csak középpontjuk körül forognak). Így elérhetjük célunkat, hogy ha először egyenként minden sor kockáinak felső lapját feketévé tesszük úgy, hogy közben attól a sortól különböző sort nem mozgattunk ezután elfordítjuk a sort valamelyik irányba 90° -kal, hogy ezek a fekete lapok a további sorok alakításánál helyben maradjanak. Végül a sorok megfelelő irányú 90° -os elforgatásával a fekete lapokat felülre hozzuk.

Kitűzött részfeladatunk megoldására válasszunk ki egy sort. Azoknak a kockáknak az oszlopát, amelyeknek az alsó vagy a felső lapja fekete, fordítsuk el valamelyik irányba 90° -kal, majd a kiszemelt sort fordítsuk el 90° -kal. Ekkor a sor egyetlen kockájának sem lesz az első vagy hátsó lapja fekete. Most feketévé tesszük a sor felső lapjait, azoknak a kockáknak az oszlopát, amelyeknek a fekete lap oldallapja, alkalmas irányba 90° -kal forgatva, azokét pedig amelyeknek alul van a fekete lapja, 180° -kal. Mivel közben csak a kiszemelt sort forgattuk (egyszer), ezzel megoldottuk részfeladatunkat, s így a kitűzött feladatot is.

4. Bizonyítsd be, hogy ha p 5-nél nagyobb prímszám, akkor az $x^4 + 4^x = p$ egyenletnek nincs egész megoldása!

Megoldás. Csak pozitív egész x értékek jönnek tekintetbe, mert negatívokra a $K = x^4 + 4^x$ kifejezés nem is egész, 0-ra pedig 1. Pozitív páros x -ekre K osztható 4-gyel, tehát összetett. Ha x pozitív páratlan szám, akkor $2y+1$ alakban írva

$$4^x = 4 \cdot 4^{2y} = 4 \cdot (2^y)^4, \text{ majd } 2^y = 2^{\frac{x-1}{2}} = z$$

helyettesítéssel kifejezésünk így alakítható:

$$\begin{aligned} K &= x^4 + 4z^4 = x^4 + 4z^4 + 4x^2z^2 - 4x^2z^2 = (x^2 + 2z^2)^2 - (2xz)^2 = \\ &= (x^2 + 2z^2 + 2xz)(x^2 + 2z^2 - 2xz) = ((x+z)^2 + z^2)((x-z)^2 + z^2). \end{aligned}$$

Itt az első tényező mindig nagyobb, mint 1, mert mindegyik tagja legalább 1. A második tényező pedig csak akkor lehet 1, ha $x = z = 1$. Mivel $x = 2y+1$ és $z = 2^y$, így ez akkor következik be, ha $x=1$ és $y=0$. Ekkor $x^4 + 4^x = 5$, p azonban 5-nél nem nagyobb. Így a feladatban szereplő egyenletnek valóban nincs egész megoldása.

5. Bizonyítsd be, hogy az $A_1A_2A_3 \dots A_{12}$ szabályos tizenkétszögben

$$\frac{1}{|A_1A_2|^2} + \frac{1}{|A_1A_6|^2} = \frac{4}{|A_1A_3|^2}.$$

Megoldás. Jelöljük a szabályos tizenkétszög köré írt körének középpontját O -val, sugara pedig legyen R . Legyen $|A_1A_2| = a$, $|A_1A_6| = b$ és $|A_1A_3| = c$. Most a

bizonyítandó állítás így alakul: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{4}{c^2}$.

Mivel az A_6A_8 ív éppen kétszerese az A_1A_2 ívnek, ezért az A_6A_8 ívhez tartozó kerületi szög egyenlő az A_1A_2 ívhez tartozó középponti szöggel, azaz $\angle A_6A_1A_8 = \angle A_1OA_2$. Ebből következik, hogy az $\triangle A_1OA_2$ és az $\triangle A_6A_1A_8$ egyenlő szárú háromszögek hasonlóak. A hasonlóság miatt és mivel $A_6A_8 = A_1A_3 = c$, ezért felírhatjuk a következő

aránypárt: $\frac{R}{a} = \frac{b}{|A_6A_8|}$, azaz $\frac{R}{a} = \frac{b}{c}$. Az

$\triangle A_1A_6A_7$ háromszög Thálész tétele miatt nyilván derékszögű, így a Pitagorasz tételt alkalmazva kapjuk, hogy

$$(2R)^2 = b^2 + |A_6A_7|^2 = b^2 + a^2, \text{ hiszen}$$

$$|A_6A_7| = |A_1A_2| = a. \text{ Innen } 2R = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

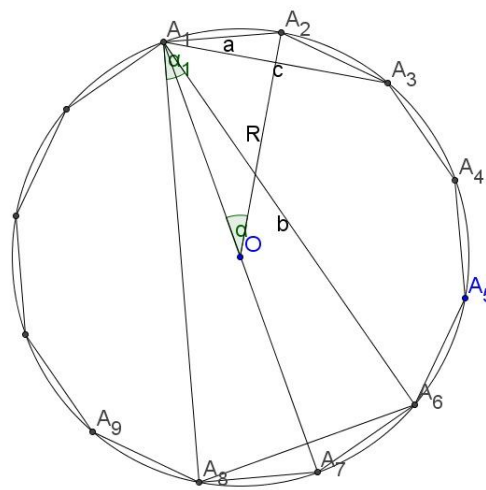
A kapott egyenlőséget behelyettesítve az előbb kapott aránypárba kapjuk, hogy

$$\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2a} = \frac{b}{c}, \text{ azaz } \frac{a^2 + b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{c^2}, \text{ vagyis}$$

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2b^2} = \frac{4}{c^2}. \text{ A kapott egyenlőség bal oldalát}$$

felbontva összegre adódik

$$\frac{b^2}{a^2b^2} + \frac{a^2}{a^2b^2} = \frac{4}{c^2}, \text{ innen pedig } \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{4}{c^2}, \text{ ami a bizonyítandó állítás.}$$



12. évfolyam

1. Bizonyítsd be, hogy ha n természetes szám, akkor $(5 + \sqrt{26})^n$ tizedestört alakjában a tizedesvesszőt követő első n számjegy egyenlő!

Megoldás. Ha az $(5 + \sqrt{26})^n$ kifejezést tagokra bontjuk, akkor azok a tagok, amelyeknél a $\sqrt{26}$ páros hatványon szerepel, egész számot adnak, amelyekben $\sqrt{26}$ kitevője páratlan, $\sqrt{26}$ egész számszorosa adja, tehát $(5 + \sqrt{26})^n = a_n + b_n \sqrt{26}$, azaz a_n és b_n pozitív együtthatók.

Ha az $(5 - \sqrt{26})^n$ kifejezést tagokra bontjuk, akkor az előbbiekhöz képest annyi a változás, hogy azok a tagok, amelyeknél a $\sqrt{26}$ páratlan hatványon szerepel, azok negatívak lesznek, tehát $(5 - \sqrt{26})^n = a_n - b_n \sqrt{26}$.

Eszerint $(5 + \sqrt{26})^n = a_n + b_n \sqrt{26} = 2a_n - (a_n - b_n \sqrt{26}) = 2a_n - (5 - \sqrt{26})^n$.

A kivonandó alapja negatív és $5,1^2 = 26,01$ folytán $0 < \sqrt{26} - 5 < 0,1$ áll fenn.

Ezek szerint $(5 + \sqrt{26})^n$ páros kitevőre kisebb, de $0,1^n$ -nél nem kevesebb, egy páros egésznél, tehát a tizedesvessző előtt páratlan szám áll, utána pedig az első n számjegy 9-es; páratlan n esetén viszont a $0,1^n$ -nél kevesebbel halad meg egy páros egész számot, tehát a tizedesvessző előtt páros egész szám áll, utána pedig n darab 0 következik.

2. Egy könyvtár ki- és bejáratánál egy-egy tábla áll. Minden be-, illetve kilépőnek fel kell írnia a megfelelő táblára, hogy hány embert talált, illetve hagyott a könyvtárban. Bizonyítsd be, hogy egy teljes nap során ugyanazok a számok kerülnek a két táblára, legfeljebb más sorrendben (feltesszük, hogy egyszerre csak egy ember érkezik vagy távozik).

Megoldás. Ha valaki bemegy a könyvtárba, akkor ezután két olyan dolog történhet meg, amely a feladat szempontjából lényeges. Vagy eszébe jut, hogy otthon hagyta az olvasójegyt és távozik, mielőtt egy másik ember bejönne – ekkor nyilvánvaló, hogy ugyanannyi embert hagy ott, mint amennyit talált –, vagy ottmarad, és ez esetben újak érkeznek utána, az olvasók száma nő a polcok között.

A második esetet vizsgáljuk meg közelebbről. Miután az egyes személyek nincsenek kitüntetve, teljesen mindegy, hogy adott pillanatban ki lép be vagy ki hagyja el a termet, ezért megállapodhatunk abban, hogy mindig az menjen el, aki utoljára bejött. Válasszunk ki egy olvasót, legyen ő A . Amikor A bejön, felírja, hogy n számú embert talált az olvasóteremben. Ezután leül, közben jönnek-mennek a többiek. Tegyük fel, hogy k számú olvasó érkezett még. Egyszer csak A feláll és elindul az ajtó felé. Ekkor őt megkérjük, hogy maradjon még, helyette pedig elküldjük azt, aki legutoljára jött be, akinek a száma a belépő tábla legalsó sorában van, $n + k$. A feladat szempontjából teljesen mindegy, hogy A ottmarad, hiszen egy fő elment helyette. Ez pedig úgy történt, hogy minden távozó ugyanazt a számot írta a távozási táblára, mint a másikkra, amikor bejött. Ha egy idő múlva senki sem jön többé olvasni, akkor

kiengedjük az eddig benn levőket érkezésük fordított sorrendjében. Így sor kerül A -ra is, majd többi társára, míg végül senki sem marad benn. Így tehát minden olvasóhoz egyértelműen hozzárendeltünk egy számpárt. Miután a feladat szempontjából lényeges változást nem tettünk, ugyanazt az eredményt kell kapnunk, mint egyébként, vagyis a két táblán ugyanazok a számok szerepelnek, csak más sorrendben.

3. Milyen n és k természetes számok esetén alkot számtani sorozatot a következő három kifejezés:

$$\binom{n}{k-1}, \binom{n}{k}, \binom{n}{k+1}.$$

Megoldás. A feladat követelménye szerint a szomszédos binomiális együtthatópárok különbsége egyenlő kell hogy legyen, vagyis a különbségek különbsége 0:

$$(1) \quad \binom{n}{k-1} - 2\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = 0.$$

Itt feltesszük, hogy $k-1 \geq 0$ és $k+1 \leq n$. A három binomiális együttható akkor és csak akkor alkot számtani sorozatot, ha az (1) egyenlőség teljesül.

Szorozzuk be (1) mindkét oldalát $\frac{(k+1)!(n-k+1)!}{n!}$ -sal. Ez $1 \leq k \leq n-1$ folytán

létezik és pozitív, így (1) akkor és csakis akkor teljesül, ha

$$k(k+1) - 2(k+1)(n-k+1) + (n-k+1)(n-k) = 0, \text{ azaz } n^2 - 4nk + 4k^2 - n - 2 = 0.$$

Eszerint $n = (n-2k)^2 - 2$, azaz n egy egész szám abszolút értékénél 2-vel kisebb. Ha $u = |n-2k|$, u pozitív egész szám, akkor $n = u^2 - 2$, ahol $u = n-2k$ vagy $u = 2k-n$, azaz k -ra a következő értéket kapjuk:

$$k = k_1 = \frac{n-u}{2} = \frac{u^2-u}{2} - 1 = \binom{u}{2} - 1 \text{ vagy } k = k_2 = \frac{n+u}{2} = \binom{u+1}{2} - 1.$$

Az utolsó alakból látható, hogy k -ra egész értéket kapunk.

Itt $u \geq 2$ kell hogy teljesüljön, hogy n pozitív egésznek adódjék. Az $u=2$ -höz tartozó két k értékre azonban $1 \leq k \leq n-1$ első, illetve második egyenlőtlensége nem teljesül.

Ha $u \geq 3$, akkor

$$k_1 = \binom{u}{2} - 1 \geq 1 \text{ és } k_1 = \frac{n-u}{2} < n.$$

Mivel pedig $k_1 + k_2 = n$ és $k_1 < k_2$, így mindkét k érték kielégíti az $1 \leq k \leq n-1$ egyenlőtlenséget.

A feladat követelményei teljesülésének szükséges és elégséges feltételéből indultunk ki és ekvivalens átalakításokat végeztünk, így azok az n , k számpárok felelnek meg, amelyeknél valamilyen 2-nél nagyobb u egészszel

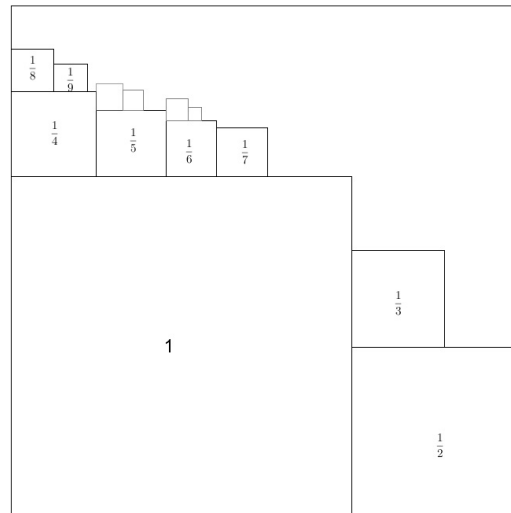
$$n = u^2 - 2 \text{ és } k = \binom{u}{2} - 1 \text{ vagy } k = \binom{u+1}{2} - 1.$$

4. Adott négyzeteknek egy végtelen sorozata, ahol az oldalak hossza rendre $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$. Bizonyítsd be, hogy van olyan négyzet, amelyben mindezek a négyzetek átfedés nélkül elhelyezhetők, és keresd meg a legkisebb ilyen négyzetet!

Megoldás. Először megmutatjuk, hogy négyzeteink elhelyezhetők egy 1,5 oldalhosszúságú négyzetben, azután bebizonyítjuk, hogy kisebb oldalú négyzetben már az 1 és 0,5 oldalhosszúságú négyzet sem helyezhető el átfedés nélkül.

a) Az összes négyzet elhelyezhető egy 1,5 oldalhosszúságú négyzetben.

Helyezzük az 1 oldalú négyzet mellé az $\frac{1}{2}$ oldalút és fölé az $\frac{1}{3}$ oldalút, majd az előbbi fölé az $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ és $\frac{1}{7}$ oldalút, a továbbiakban pedig minden négyzetre a fele akkora oldalút és a rá következőt.



Az utóbbi kettő nyilván nem nyúlik túl az alattuk levő négyzeten, és

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} < 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

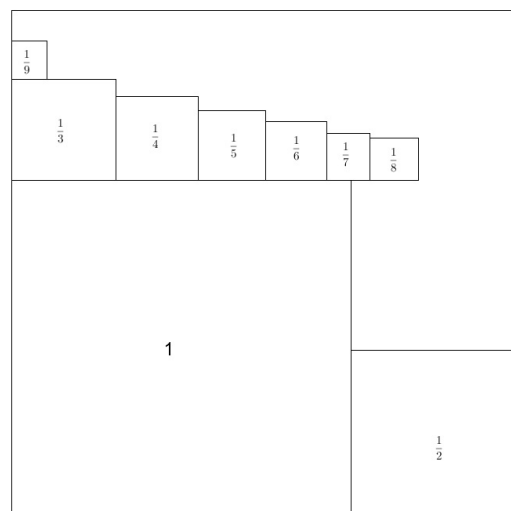
folytán az első négyzet sem az 1 oldalú négyzeten.

Az $\frac{1}{k}$ oldalú négyzet ($k = 4, 5, 6, 7$) és a ráhelyezettek felfelé nem nyúlnak magasabbra, mint

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{4k} + \frac{1}{8k} + \dots = \frac{2}{k} \leq \frac{1}{2},$$

Így négyzeteink valóban elhelyezhetők egy 1,5 oldalhosszúságú négyzetben.

b) Az 1 és a 0,5 oldalhosszúságú négyzet nem helyezhető el átfedés nélkül 1,5-nél kisebb oldalú négyzetben.

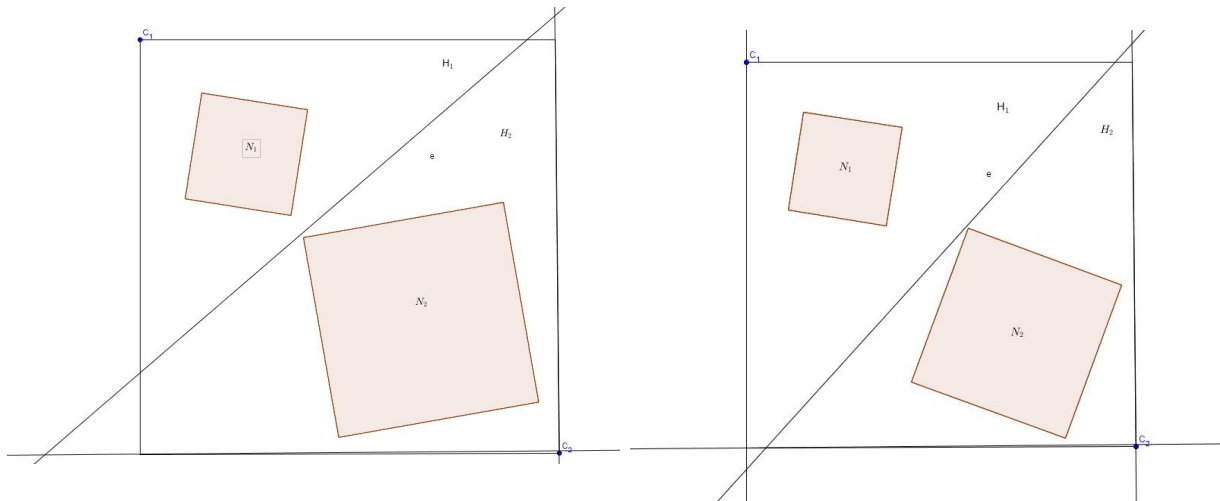
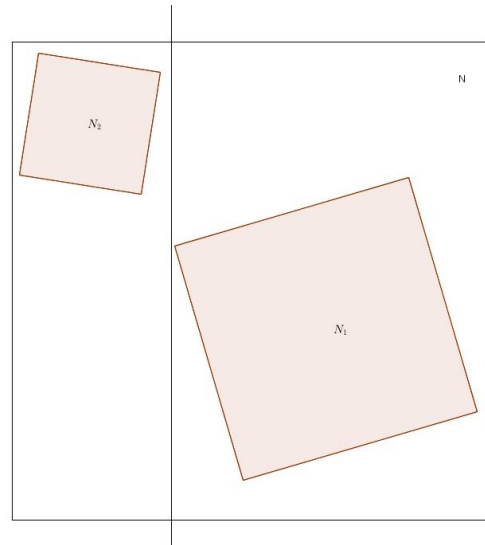


Helyezkedjék el az 1 oldalú N_1 és az $\frac{1}{2}$ oldalú N_2 négyzet egy N négyzetben úgy, hogy ne legyen közös belső pontjuk. Ekkor van olyan e egyenes, amelynek N_1 és N_2 ellenkező oldalán fekszik. Ha e párhuzamos N valamelyik oldalával, akkor két téglalapra bontja azt, és mindegyiknek az e -re merőleges oldala legalább akkora, mint a sávban fekvő négyzet oldala. Ez esetben tehát N oldala legalább akkora, mint N_1 és N_2 oldalának összege.

Ha e metszi N mindegyik oldalegyenesét, akkor vegyük mindkét oldalán N -nek a tőle legtávolabbi C_1 , illetve C_2 csúcsát. A C_1 -en, illetve C_2 -n átmenő oldalegyenesek e -vel egy-egy H_1 , illetve H_2 derékszögű háromszöget alkotnak.

Ezek egyike N_1 -et, másika N_2 -t tartalmazza. Állításunk bizonyítására elegendő felhasználni a következő segédtevélt: *Egy derékszögű háromszög tartalmazta négyzetek közül az a legnagyobb, amelyiknek két oldala a háromszög befogóin nyugszik, egy csúcsa pedig az átfogón van.*

Valóban, ha ez igaz, akkor a H_1 -ben és H_2 -ben elhelyezhető legnagyobb négyzetek átlója N -nek a C_1C_2 átlójára esik, és mivel a négyzetek nem fedhetik át egymást, így átlójuk összege N átlóját, oldalhosszaik összege tehát N oldalát adja, vagyis igaz a bizonyítandó állítás is.



5. Az ABC háromszög B és C csúcsain átmenő kör az AB oldalt D pontban, az AC oldalt pedig E pontban metszi. A háromszög AF súlyvonala DE -t G pontban metszi. Bizonyítsd be, hogy ekkor

$$\frac{|GD|}{|GE|} = \frac{|AC|^2}{|AB|^2}.$$

Megoldás. A DGA , illetve az EGA háromszögek területeinek aránya egyenlő a GD , illetve a GE szakaszok arányával, hiszen e háromszögek GD , illetve GE oldalakhoz

tartozó magasságvonalai egyenlők. Legyen $BAF\angle = \varphi$ és $FAC\angle = \psi$. Felhasználva a háromszög trigonometrikus területképletét, felírhatjuk, hogy

$$\frac{|DG|}{|GE|} = \frac{T_{DGA}}{T_{GEA}} = \frac{|AD| \cdot |AG| \cdot \sin \varphi}{|AE| \cdot |AG| \cdot \sin \psi}.$$

Mivel F az ABC háromszög BC oldalának felezőpontja, ezért

$$T_{BFA} = T_{FCA},$$

azaz

$$\frac{|AB| \cdot |AF| \cdot \sin \varphi}{2} = \frac{|AC| \cdot |AF| \cdot \sin \psi}{2},$$

ahonnan

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{|AC|}{|AB|}.$$

A kapott eredményt felhasználva adódik, hogy

$$\frac{|DG|}{|GE|} = \frac{|AD|}{|AE|} \cdot \frac{|AC|}{|AB|}.$$

Legyen $ABC\angle = \beta$ és $ACB\angle = \gamma$. A $BCED$ négyszög húrnégyszög, ezért

$$DEC\angle = 180^\circ - \beta, \text{ azaz } DEA\angle = \beta.$$

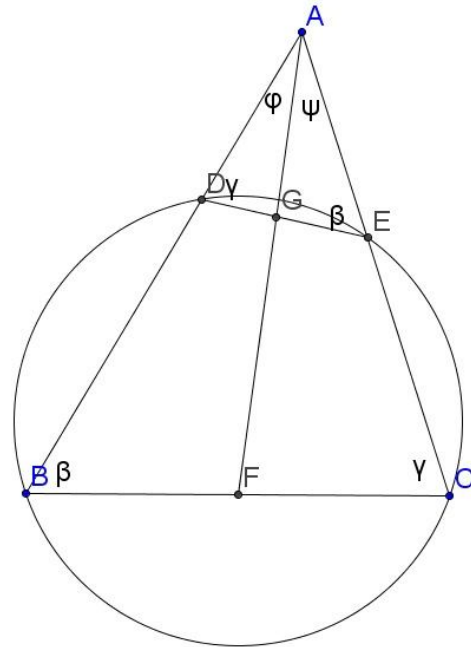
Hasonlóképpen kaphatjuk meg, hogy

$$ADE\angle = \gamma,$$

így az ADE háromszög hasonló az ACB háromszöghöz, amiből következik, hogy

$$\frac{|AD|}{|AE|} = \frac{|AC|}{|AB|}, \text{ illetve } \frac{|GD|}{|GE|} = \frac{|AC|^2}{|AB|^2},$$

és éppen ezt akartuk belátni.



A III. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY DÍJAZOTTJAI

9. évfolyam

1. Kanalas Vidor, Matematikai Gimnázium, Belgrád, **I. díj**
2. Homolya Miklós, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
3. Takács Emese, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **II. díj**
4. Bodócsi Endre, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
5. Balog Dániel, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
6. Vidács Vilmos, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
7. Gleszer Erik, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
8. Kovács Ildikó, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
9. Girizd Lóránd, Zentai Gimnázium, Zenta, **III. díj**
10. Sinka Mónika, Zentai Gimnázium, Zenta, **III. díj**

10. évfolyam

1. Csizmadija Laura, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **I. díj**
2. Gombár Tamás, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
3. Kalmár Gergely, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
4. Juhász Andor, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**

11. évfolyam

1. Fésűs Attila, Jovan Jovanović Zmaj Gimnázium, Újvidék, **I. díj**
2. Takács Árpád, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **I. díj**
3. Csizmadia Zsolt, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
4. Varga Dávid, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **II. díj**
5. Kálózi Miklós, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **II. díj**
6. Lakatos Zoltán, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **III. díj**
7. Sóti Attila, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
8. Borbás Imre, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
9. Döme Zsolt, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
10. Somogyi Huba, Műszaki Középiskola, Szabadka, **III. díj**

12. évfolyam

1. Sóti Valentin, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **II. díj**
2. Holló Dóra, Dositej Obradović Gimnázium, Topolya, **III. díj**

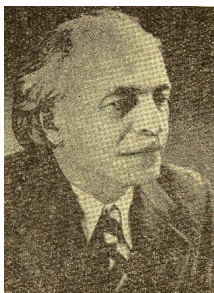
A IV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Előadó: Boros István, magiszter

Előadás címe: Dominók, tetramínók



A Versenybizottság értékeli a versenyzők kidolgozásait: Csikós Pajor Gizella,
Rozsnyik Andrea, Miklós Gyöngyi, Zolnai Irén.



IV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2006. december 9.

9. évfolyam

1. Csaba, András, Béla felesége – nem feltétlenül azonos sorrendben – Edit, Margit, Katalin. E hat személy életkorának összege 153 év. Mindegyik férj 7 évvel idősebb a feleségénél. András 3 évvel idősebb mint Katalin. Margit és András együtt 48 éves. Béla és Margit életkorának összege 52 év. Határozd meg e hat személy életkorát, ha azok mindegyike – években számolva – egész szám.

2. Az $\overline{abcd}$ (tízes számrendszerbeli) négyjegyű számról tudjuk, hogy

$$\overline{abc} + \overline{ab} + a = 219 \text{ és } a + b + c + d = 21.$$

Melyik ez a négyjegyű szám?

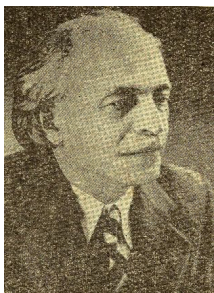
3. Az ABC háromszögben legyen $a = |BC|$, $b = |AC|$ és $c = |AB|$. Igazold, hogy az A csúcsból kiinduló t_a súlyvonal hosszúságára igaz, hogy

$$t_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

4. Mutasd meg, hogy $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 1003 + 1004 \cdot 1005 \cdot \dots \cdot 2006$ osztható 2007-tel!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



IV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2006. december 9.

10. évfolyam

1. Két kofa összesen 100 tojást adott el. A tojások darabját egyikük más áron adta mint a másik, de végül a bevételük ugyanannyi volt. Az egyik azt mondta a másiknak: „A te tojásaidért én összesen 45 petákot kaptam volna.” Mire a másik azt felelte: „Én meg a tiedért összesen 20 petákot.” Ki hány tojást adott el?

2. Határozd meg az $\overline{abcd}$ (tízes számrendszerbeli) négyjegyű számot, ha tudjuk róla, hogy

$$\overline{cda} - \overline{abc} = 297 \text{ és } a + b + c = 23.$$

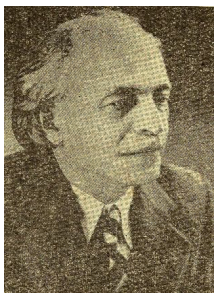
3. Igazold, hogy a , b és c pozitív valós számok esetén fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c) \geq 6abc.$$

4. Az $r_1 = 6$ sugarú k_1 kör és az $r_2 = 3$ sugarú k_2 kör kívülről érintik egymást, az $r = 9$ sugarú k kört pedig mindkettő belülről érinti. A k_1 és k_2 körök közös érintőegyenese a k kört P és Q pontokban metszi. Határozd meg a $|PQ|$ távolságot!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



IV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2006. december 9.

11. évfolyam

1. Bontsd tényezőire az $n^4 + 4$ kifejezést, majd igazold, hogy

$$\frac{\left(1^4 + \frac{1}{4}\right)\left(3^4 + \frac{1}{4}\right)\left(5^4 + \frac{1}{4}\right)\cdots\left(11^4 + \frac{1}{4}\right)}{\left(2^4 + \frac{1}{4}\right)\left(4^4 + \frac{1}{4}\right)\left(6^4 + \frac{1}{4}\right)\cdots\left(12^4 + \frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{313}.$$

2. Oldd meg a következő egyenletet:

$$\log_{x+8}\left(5 - \sqrt{1 + 2x + x^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

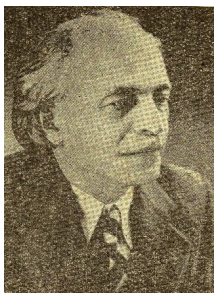
3. Oldd meg a következő egyenletet, ha a és b pozitív valós számok:

$$\frac{a \sin x + b}{b \cos x + a} = \frac{a \cos x + b}{b \sin x + a}.$$

4. Adott a szabályos $SABC$ tetraéder. Mekkora szög alatt látszanak az ABC alapháromszög élei az SO magasság D felezőpontjából?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



IV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2006. december 9.

12. évfolyam

1. Határozd meg az

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0 \text{ és } x^2 + y^2 - 3x + 4y = 0$$

körök közös húrjának hosszúságát!

2. Az R sugarú gömb köré írt kúpok közül melyiknek legkisebb a felszíne?
Határozd meg ezt a felszínt!

3. Oldd meg a következő egyenletet:

$$\frac{\sin x}{\cos x} + 6 \frac{\cos x}{\sin x} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} - 1 - 4\sqrt{3}.$$

4. Hány olyan számtani sorozat van, amelynek elemei természetes számok és az első 37 elem összege 1998?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

A IV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI

9. évfolyam

1. Csaba, András, Béla felesége – nem feltétlenül azonos sorrendben – Edit, Margit, Katalin. E hat személy életkorának összege 153 év. Mindegyik férj 7 évvel idősebb a feleségénél. András 3 évvel idősebb mint Katalin. Margit és András együtt 48 éves. Béla és Margit életkorának összege 52 év. Határozd meg e hat személy életkorát, ha azok mindegyike – években számolva – egész szám!

Megoldás. Ha a férfiak mindegyike 7 évvel idősebb a feleségénél, akkor a házaspárok tagjainak együttesen páratlan sok éve van, ezért Margit férje csak Csaba lehet, továbbá a három férj korának összege 87 év, míg feleségeiké 66 év. Adjuk össze Margit és András, Margit és Béla, valamint Csaba életkorát! A feltételek szerint ez az összeg $48+52+\text{Margit életkora}+7$ év. Ezek szerint a három férj és Margit életkorának összege 107 év. A férjek együttes kora 87 év, Margit tehát 20 éves és férje Csaba, 27 éves. Ezek után már könnyen nyerjük, hogy András 28 éves és felesége Edit, 21 éves, Béla 32 éves és felesége Katalin, 25 éves.
Ezek az adatok kielégítik a feladatbeli feltételeket.

2. Az $\overline{abcd}$ (tízest számrendszerbeli) négyjegyű számról tudjuk, hogy

$$\overline{abc} + \overline{ab} + a = 219 \text{ és } a + b + c + d = 21.$$

Melyik ez a négyjegyű szám?

Megoldás. $a=1$ lehet csak, mivel $a=0$ -ra a szám nem négyjegyű, $a \geq 2$ esetén pedig az első egyenlőség bal oldala legalább 222 lenne. Ezek után $b=9$, hiszen $b \leq 8$ esetén előbbi egyenletünk bal oldala legfeljebb $189+18+1=208$ lenne.

Az $a=1$ és $b=9$ értékek első egyenletünkből a

$$190 + c + 19 + 1 = 219$$

egyenletre vezetnek, amelyből $c=9$ és ezzel a második egyenletből $d=2$ adódik.

A keresett négyjegyű szám tehát 1992, mivel

$$199 + 19 + 1 = 219 \text{ és } 1 + 9 + 9 + 2 = 21.$$

3. Az ABC háromszögben legyen $a = |BC|$, $b = |AC|$ és $c = |AB|$. Igazold, hogy az A csúcsból kiinduló t_a súlyvonal hosszúságára igaz, hogy

$$t_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

I.Megoldás. Legyen D a BC oldal felezőpontja, E és F pedig a B és C pontok t_a súlyvonal egyenesére vetett merőleges vetületei. Tegyük fel, hogy a pontok sorrendje $A-E-D-F$. A másik esetben ($A-F-D-E$), illetve az $E=D=F$ elfajuló esetben is a bizonyítás hasonló. A BED és CFD háromszögek egybevágóak. Legyen $|DE| = |DF| = x$ és $|CF| = |BE| = y$. Az ABE és AFC háromszögekben:

$$(t_a - x)^2 + y^2 = c^2 \text{ és } (t_a + x)^2 + y^2 = b^2.$$

Összeadva a fenti két egyenlőséget adódik, hogy

$$2t_a^2 + 2x^2 + 2y^2 = b^2 + c^2.$$

A DFC derékszögű háromszögből kapjuk, hogy $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}a^2$, ebből pedig

$$2t_a^2 + 2 \cdot \frac{a^2}{4} = b^2 + c^2$$

következik, ami a kívánt egyenlőséget adja.

II. Megoldás. Jelölje t_a az ABC háromszög A csúcsából kiinduló súlyvonalat, h_a pedig az A csúcshoz tartozó magasságvonalat. Legyen $|DE| = x$, ahol D a súlyvonal BC oldalon nyugvó végpontja, E pedig a h_a magasság talppontja. A továbbiakban tegyük fel, hogy az E pont a C és D pontok közé esik. Fordított esetben, ha az E pont a D és B pontok közé esik, illetve az $E = D$ elfajuló esetben is a megoldás menete hasonló.

Az AED derékszögű háromszögből $t_a^2 = h_a^2 + x^2$, az AEB derékszögű háromszögből

$$h_a^2 = c^2 - \left(\frac{a}{2} - x\right)^2, \text{ az } AEC \text{ derékszögű háromszögből pedig } h_a^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2} + x\right)^2.$$

A második és harmadik egyenlőségéből adódik, hogy $x = \frac{b^2 - c^2}{2a}$, az első

egyenlőségéből pedig, hogy $t_a^2 = c^2 - \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 + x^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$, amiből gyökvonással jön a kívánt egyenlőség.

4. Mutasd meg, hogy $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 1003 + 1004 \cdot 1005 \cdot \dots \cdot 2006$ osztható 2007-tel!

Megoldás. Az $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 1003 + 1004 \cdot 1005 \cdot \dots \cdot 2006$ összeg második tagjának tényezőit felbonthatjuk a következő módon:

$$\begin{aligned} 1004 &= 2007 - 1003, \\ 1005 &= 2007 - 1002, \\ &\vdots \\ 2006 &= 2007 - 1. \end{aligned}$$

A szorzásokat elvégezve a tagok egy részében szerepel 2007, így ezek összege osztható 2007-tel. A maradék pedig a $(-1003) \cdot (-1002) \cdot (-1001) \cdot \dots \cdot (-1)$ szorzat. Mivel a szorzatban páratlan sok tényező szerepel, a szorzat előjele negatív, értéke pedig megegyezik az adott összeg első tagjában szereplő szorzat értékével, így az összegük nulla. Az összeg tehát valóban osztható 2007-tel.

10. évfolyam

1. Két kofa összesen 100 tojást adott el. A tojások darabját egyikük más áron adta mint a másik, de végül a bevételük ugyanannyi volt. Az egyik azt mondta a másiknak: „A te tojásaidért én összesen 45 petákot kaptam volna.” Mire a másik azt felelte: „Én meg a tiedért összesen 20 petákot.” Ki hány tojást adott el?

I.Megoldás. Ha az egyik kofa x db tojást darabonként a petákért, a másik pedig $100 - x$ tojást darabonként b petákért adott, akkor egyrészt $ax = (100 - x)b$, másrészt $(100 - x)a = 45$ és $xb = 20$. Szorozzuk össze az utolsó két egyenletet. Ebből adódik, hogy $20(100 - x)a = 45xb$. Ha ezt elosztjuk az első egyenlettel, akkor a következőt kapjuk:

$$\frac{20(100 - x)a}{xa} = \frac{45xb}{(100 - x)b}$$

A bal, illetve a jobb oldalon álló törtekben az a , illetve b tényezővel egyszerűsítve, majd mindkét oldalt $\frac{x(100 - x)}{5}$ -tel szorozva, a lehetséges egyszerűsítések után a

$4(100 - x)^2 = 9x^2$ egyenlethez jutunk. Vegyük észre, hogy mindkét oldalon négyzetszámok állnak, márpedig két pozitív szám négyzete akkor és csak akkor egyenlő, ha maguk a számok is egyenlők, azaz $2(100 - x) = 3x$, amiből $200 = 5x$, tehát

$x = 40$ kell legyen. Így $b = \frac{1}{2}$ peták és $a = \frac{3}{4}$ peták. Ez valóban megoldás, hiszen ha

az egyik kofa 40 tojást adott el darabonként $\frac{3}{4}$ petákért, akkor 30 petákot kapott a tojásaiért, a másik kofa a 60 darab tojásért pedig a 60 felét, tehát 30 petákot, s így valóban azonos bevételre tettek szert. Ha a 40 tojást adták volna egyenként $\frac{1}{2}$

petákért, a 60-at pedig $\frac{3}{4}$ petákért, úgy 20, illetve 45 peták a bevétel.

II.Megoldás. A két kofa által eladott tojások darabszáma arányának a reciproka egyenlő az érték egyenként kért petákok arányával, mivel a két kofa bevétele azonos. Ez azt jelenti, hogy ha a két kofa „árat cserél”, akkor feltételezett bevételük aránya, azaz a $\frac{45}{20}$ egyenlő az általuk eladott darabszámok arányának a négyzetével, hiszen a bevétel a tojások számarányának és a darabárak arányának a szorzata, ám az „árcsere”

miatt ez utóbbi arány az előbbivel egyenlő. Mivel $\frac{45}{20} = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$, ezért a kofák a

tojásokat 3:2 arányban birtokolják, ami 100 tojásra 60:40 arányt jelent, vagyis egyikük 60, a másikuk 40 tojással kofálkodott.

2. Határozd meg az $\overline{abcd}$ (tízes számrendszerbeli) négyjegyű számot, ha tudjuk róla, hogy

$$\overline{cda} - \overline{abc} = 297 \text{ és } a + b + c = 23.$$

Megoldás. Végezzük el az alábbi ekvivalens átalakításokat:

$$\overline{cda} - \overline{abc} = 297$$

$$\underline{a + b + c = 23}$$

$$100c + 10d + a - 100a - 10b - c = 297$$

$$\underline{a + b + c = 23}$$

$$99(c - a) + 10(d - b) = 297$$

$$\underline{a + b + c = 23}$$

$$c - a = 3 \quad \wedge \quad b = d$$

$$\underline{a + b + c = 23}$$

$$b = d \quad \wedge \quad 2a + b = 20$$

$a = 0$	$b = 20$	nem jó
$a = 1$	$b = 18$	nem jó
$a = 2$	$b = 16$	nem jó
$a = 3$	$b = 14$	nem jó
$a = 4$	$b = 12$	nem jó
$a = 5$	$b = 10$	nem jó
$a = 6$	$b = 8$	$c = 9$ jó
$a = 7$	$b = 6$	nem jó
$a = 8$	$b = 4$	nem jó
$a = 9$	$b = 2$	nem jó

A keresett szám tehát 6898.

3. Igazold, hogy a , b és c pozitív valós számok esetén fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c) \geq 6abc.$$

Megoldás. Végezzük el a következő ekvivalens átalakításokat:

$$ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c) =$$

$$= a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + a^2c + ac^2 =$$

$$= a(b^2 - 2bc + c^2) + b(a^2 - 2ac + c^2) + c(a^2 - 2ab + b^2) + 6abc =$$

$$= a(b-c)^2 + b(a-c)^2 + c(a-b)^2 + 6abc \geq 6abc.$$

4. Az $r_1 = 6$ sugarú k_1 kör és az $r_2 = 3$ sugarú k_2 kör kívülről érintik egymást, az $r = 9$ sugarú k kört pedig mindkettő belülről érinti. A k_1 és k_2 körök közös érintőegyenese a k kört P és Q pontokban metszi. Határozd meg a $|PQ|$ távolságot!

Megoldás. Ha ez a közös érintő a k_1 és k_2 kört egy közös érintési pontban metszi, akkor legyen ez a pont R , a k kör középpontja pedig O . Mivel ORP háromszög derékszögű, ezért

$$|PQ| = 2|PR| = 2\sqrt{|OP|^2 - |OR|^2} = 2\sqrt{9^2 - 3^2} = 2\sqrt{72} = 12\sqrt{2}.$$

Ha a közös érintő nem közös érintési pontban metszi a köröket, akkor legyenek O , O_1 és O_2 rendre a k , k_1 és k_2 körök középpontjai, T , T_1 és T_2 pedig rendre az O , O_1 és O_2 pontok PQ érintőre vetett merőleges vetületei. Az O_2 pontból húzott PQ -val párhuzamos egyenes az N és N_1 pontokban metszi az OT és O_1T_1 szakaszokat. Tudjuk, hogy

$$|O_1N_1| = 3, |O_1O_2| = 9 \text{ és } |OO_2| = 6.$$

Az $O_1O_2N_1$ és OO_2N háromszögek hasonlóságából következik, hogy

$$\frac{|ON|}{|O_1N_1|} = \frac{|OO_2|}{|O_1O_2|}, \text{ ahonnan } |ON| = |O_1N_1| \cdot \frac{|OO_2|}{|O_1O_2|} = 2.$$

Mivel $|OT| = |ON| + |NT| = 5$, így a POT háromszögből adódik, hogy

$$|PQ| = 2|PT| = 2\sqrt{|OP|^2 - |OT|^2} = 2\sqrt{9^2 - 5^2} = 4\sqrt{14}.$$

11. évfolyam

1. Bontsd tényezőire az $n^4 + 4$ kifejezést, majd igazold, hogy

$$\frac{\left(1^4 + \frac{1}{4}\right)\left(3^4 + \frac{1}{4}\right)\left(5^4 + \frac{1}{4}\right)\cdots\left(11^4 + \frac{1}{4}\right)}{\left(2^4 + \frac{1}{4}\right)\left(4^4 + \frac{1}{4}\right)\left(6^4 + \frac{1}{4}\right)\cdots\left(12^4 + \frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{313}.$$

Megoldás. Vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned} n^4 + 4 &= n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 = \\ &= (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2) = ((n-1)^2 + 1)((n+1)^2 + 1). \end{aligned}$$

Végezzük el az alábbi ekvivalens átalakításokat:

$$\begin{aligned} &\frac{\left(1^4 + \frac{1}{4}\right)\left(3^4 + \frac{1}{4}\right)\left(5^4 + \frac{1}{4}\right)\cdots\left(11^4 + \frac{1}{4}\right)}{\left(2^4 + \frac{1}{4}\right)\left(4^4 + \frac{1}{4}\right)\left(6^4 + \frac{1}{4}\right)\cdots\left(12^4 + \frac{1}{4}\right)} = \\ &= \frac{(2^4 + 4)(6^4 + 4)(10^4 + 4)\cdots(22^4 + 4)}{(4^4 + 4)(8^4 + 4)(12^4 + 4)\cdots(24^4 + 4)} = \\ &= \frac{(1^2 + 1)(3^2 + 1)(5^2 + 1)(7^2 + 1)\cdots(21^2 + 1)(23^2 + 1)}{(3^2 + 1)(5^2 + 1)(7^2 + 1)(9^2 + 1)\cdots(23^2 + 1)(25^2 + 1)} = \frac{2}{25^2 + 1} = \frac{1}{313}. \end{aligned}$$

2. Oldd meg a következő egyenletet:

$$\log_{x+8} \left(5 - \sqrt{1 + 2x + x^2} \right) = \frac{1}{2}.$$

Megoldás. A logaritmusfüggvény tulajdonságai alapján a kikötések

$$x + 8 > 0 \text{ és } x + 8 \neq 1,$$

azaz $x > -8$ és $x \neq -7$, valamint

$$5 - \sqrt{1 + 2x + x^2} = 5 - |x + 1| > 0,$$

amelynek megoldása $x \in (-6, 4)$.

1.eset: $x \in (-6, -1)$

$$\log_{x+8} \left(5 - \sqrt{1 + 2x + x^2} \right) = \frac{1}{2}, \text{ ahonnan } \log_{x+8} (5 + x + 1) = \frac{1}{2}, \text{ azaz } 6 + x = \sqrt{x + 8}.$$

A kapott egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve adódik az $x^2 + 11x + 28 = 0$ másodfokú egyenlet, amelynek megoldásai $x = -4$ és $x = -7$, de csak az első megoldás van benne a szemlélt értelmezési tartományban.

2.eset: $x \in (-1, 4)$

$$\log_{x+8} \left(5 - \sqrt{1 + 2x + x^2} \right) = \frac{1}{2}, \text{ ahonnan } \log_{x+8} (5 - x - 1) = \frac{1}{2}, \text{ azaz } 4 - x = \sqrt{x + 8}.$$

A kapott egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve adódik az $x^2 - 9x + 8 = 0$ másodfokú egyenlet, amelynek megoldásai $x = 1$ és $x = 8$, de csak az első megoldás van benne a szemlélt értelmezési tartományban.

Az eredeti logaritmusos egyenlet megoldásai tehát $x = -4$ és $x = 1$.

3. Oldd meg a következő egyenletet, ha a és b pozitív valós számok:

$$\frac{a \sin x + b}{b \cos x + a} = \frac{a \cos x + b}{b \sin x + a}.$$

Megoldás. A nevező nem lehet nulla, tehát a kikötések $b \cos x + a \neq 0$ és $b \sin x + a \neq 0$. A fenti egyenletből adódik, hogy

$$(a \sin x + b)(b \sin x + a) = (a \cos x + b)(b \cos x + a),$$

ebből pedig némi rendezés után adódik, hogy

$$(\sin x - \cos x)(a^2 + b^2 + ab(\sin x + \cos x)) = 0.$$

Ha $\sin x - \cos x = 0$, akkor $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Mivel

$$a^2 + b^2 + ab(\sin x + \cos x) > a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geq 0,$$

így $a^2 + b^2 + ab(\sin x + \cos x) \neq 0$, tehát ennek az egyenletnek nincs megoldása.

Az eredeti egyenlet megoldása csupán $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. Adott a szabályos $SABC$ tetraéder. Mekkora szög alatt látszanak az ABC alapháromszög élei az SO magasság D felezőpontjából?

I.Megoldás. Legyen AM súlyvonal és legyen az O pont az ABC alapháromszög súlypontja, az N pont pedig az AO szakasz felezőpontja. Ekkor $DON\Delta \cong DOM\Delta$ (hiszen $|NO| \cong |MO|$, az OD oldal közös, az O pontnál levő szög pedig derékszög), ahonnan következik, hogy $|DN| \cong |DM|$. A DN szakasz az $ASO\Delta$ középvonala.

Ebből következik, hogy

$$|DN| = \frac{|SA|}{2}, \text{ tehát } |DM| = \frac{|SA|}{2} = \frac{|BC|}{2},$$

vagyis a DM szakasz a $BCD\Delta$ súlyvonala, M a körülírt körének középpontja, amelyből $BDC\angle = 90^\circ$ adódik. A többi alapélre az állítás hasonlóan következik.

II.Megoldás. Az $OBD\Delta \cong OCD\Delta$, így $|BD| \cong |CD|$, azaz a $BCD\Delta$ egyenlő szárú.

Mivel $|OB| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, ahol a -val jelöljük a tetraéder élét és $|OD| = \frac{H}{2} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$, ezért

$$|BD|^2 = |OB|^2 + |OD|^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{6} = \frac{a^2}{2}.$$

Innen $|BD| = \frac{a\sqrt{2}}{2} = |CD|$, ezért a $BCD\Delta$ egyenlő szárú és derékszögű, azaz $BCD\angle = 90^\circ$.

12. évfolyam

1. Határozd meg az

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0 \text{ és } x^2 + y^2 - 3x + 4y = 0$$

körök közös húrjának hosszúságát!

Megoldás. Kivonva egymásból a két köregyenletet kapjuk az $x - 8y - 4 = 0$, azaz $x = 8y + 4$ egyenletet, amelyet behelyettesítve a második köregyenletbe kapjuk a $65y^2 + 44y + 4 = 0$ másodfokú egyenletet. Ennek megoldásai

$$y_1 = \frac{-22 - 4\sqrt{14}}{65} \text{ és } y_2 = \frac{-22 + 4\sqrt{14}}{65}$$

A másik ismeretlen megfelelő értékei pedig $x_1 = \frac{84 - 32\sqrt{14}}{65}$ és $x_2 = \frac{84 + 32\sqrt{14}}{65}$.

A metszéspontok koordinátái tehát

$$A\left(\frac{84 - 32\sqrt{14}}{65}, \frac{-22 - 4\sqrt{14}}{65}\right) \text{ és } B\left(\frac{84 + 32\sqrt{14}}{65}, \frac{-22 + 4\sqrt{14}}{65}\right),$$

a közöttük levő távolság pedig $|AB| = 8\sqrt{\frac{14}{65}}$.

2. Az R sugarú gömb köré írt kúpok közül melyiknek legkisebb a felszíne? Határozd meg ezt a felszínt!

Megoldás. Jelölje r a gömb köré írt kúp alapkörének sugarát s pedig a kúp alkotóját.

Mivel $R : (s - r) = r : H$, ezért $HR = rs - r^2$, ahonnan $s = \frac{HR + r^2}{r}$.

Mivel $R : (H - R) = r : s$, ezért $sR = rH - rR$, ahonnan $s = \frac{rH - rR}{R}$.

Ekkor $\frac{HR + r^2}{r} = \frac{rH - rR}{R}$, ahonnan $HR^2 + r^2R = r^2H - r^2R$, illetve $H = \frac{2r^2R}{r^2 - R^2}$.

Kiszámítva a kúp felszínét kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} F &= r\pi(r + s) = r\pi\left(r + \sqrt{r^2 + H^2}\right) = r\pi\left(r + \sqrt{r^2 + \frac{4r^4R^2}{(r^2 - R^2)^2}}\right) = \\ &= r\pi\left(r + r\sqrt{\frac{r^4 - 2r^2R^2 + R^4 + 4r^2R^2}{(r^2 - R^2)^2}}\right) = r^2\pi\left(1 + \sqrt{\left(\frac{r^2 + R^2}{r^2 - R^2}\right)^2}\right) = \\ &= r^2\pi\left(1 + \frac{r^2 + R^2}{r^2 - R^2}\right) = r^2\pi\frac{r^2 - R^2 + r^2 + R^2}{r^2 - R^2} = \frac{2r^4\pi}{r^2 - R^2}. \end{aligned}$$

A kapott függvény deriváltja:

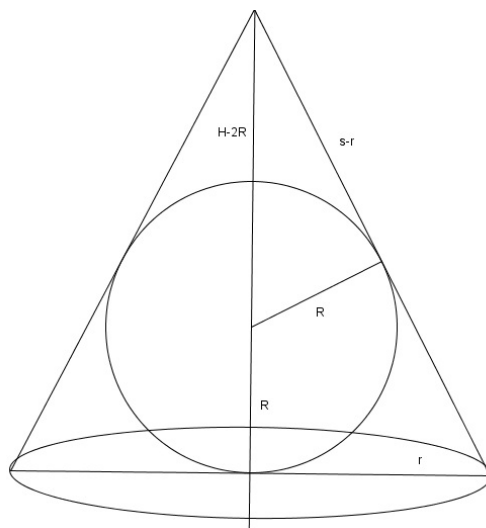
$$F'(r) = \left(\frac{2r^4\pi}{r^2 - R^2}\right)' = \frac{8r^3\pi(r^2 - R^2) - 2r^4\pi \cdot 2r}{(r^2 - R^2)^2} = 4\pi \cdot \frac{r^5 - 2r^3R^2}{(r^2 - R^2)^2}.$$

Most $F'(r)=0$ akkor és csakis akkor, ha $r^3(r^2-2R^2)=0$. Egy szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla, vagyis ebben az esetben $r=0$ vagy $r=R\sqrt{2}$. Mivel a 0 alapsugarú kúp nem lehet megoldás, így a megoldás $r=R\sqrt{2}$, és

$$F_{\min}(R\sqrt{2}) = \frac{2\pi \cdot 4R^4}{2R^2 - R^2} = 8R^2\pi, \text{ mivel}$$

$$F''(r) = 4\pi \cdot \frac{r^6 - 3r^4R^2 + 6r^2R^4}{(r^2 - R^2)^2} \text{ és}$$

$$F''(R\sqrt{2}) = 4\pi \cdot 8R^3 > 0.$$



3. Oldd meg a következő egyenletet:

$$\frac{\sin x}{\cos x} + 6 \frac{\cos x}{\sin x} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} - 4\sqrt{3}.$$

Megoldás. Alakítsuk át a gyök alatti mennyiséget:

$$\frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x \geq 0.$$

A fenti egyenlet ekvivalens alakja: $\operatorname{tg} x + 6\operatorname{ctg} x = |\operatorname{tg} x| - 4\sqrt{3}$.

Ha $\operatorname{tg} x > 0$, akkor $\operatorname{ctg} x = -\frac{2\sqrt{3}}{3} < 0$, amelyből $\operatorname{tg} x < 0$ következik. Mivel ez ellentmondást jelent, így ez az eset nem lehetséges.

Ha $\operatorname{tg} x < 0$, akkor

$$2\operatorname{tg} x + 6\operatorname{ctg} x + 4\sqrt{3} = 0,$$

$$\operatorname{tg}^2 x + 2\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 3 = 0,$$

$$(\operatorname{tg} x + \sqrt{3})^2 = 0,$$

$$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}, \text{ ahonnan } x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

4. Hány olyan számtani sorozat van, amelynek elemei természetes számok és az első 37 elem összege 1998?

Megoldás. Legyenek $a_1, a_2, a_3, \dots$ a számtani sorozat elemei, d pedig a számtani sorozat differenciája. A feltételek alapján a sorozat elemei pozitívak.

Legyen $a_{19} = x$. Ekkor

$$(x-18d) + (x-17d) + \dots + (x-d) + x + (x+d) + \dots + (x+18d) = 1998,$$

amelyből $x = a_{19} = 54$. Ebből meghatározható, hogy

$$a_1 = x - 18d = 54 - 18d = 18(3 - d).$$

$3 - d > 0$ miatt csak $d = 1$ vagy $d = 2$ lehetséges.

Ha $d = 1$, akkor $a_1 = 36$ és $a_n = n + 35$. Ha $d = 2$, akkor $a_1 = 18$ és $a_n = 2n + 16$.

A IV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY DÍJAZOTTJAI

9. évfolyam

1. Balassa Tamás, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **I. díj**
2. Rakita Marko, Jovan Jovanović Zmaj Gimnázium, Újvidék, **I. díj**
3. Ágó Krisztina, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **II. díj**
4. Kovacsics Tóbiás, Műszaki Középiskola, Becse, **II. díj**
5. Dragoljević Milan, Jovan Jovanović Zmaj Gimnázium, Újvidék, **II. díj**
6. Kerekes Emese, Dositej Obradović Gimnázium, Topolya, **dicséret**
7. Kecsenovity Egon, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
8. Guzsvány Szandra, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**

10. évfolyam

1. Kanalas Vidor, Matematikai Gimnázium, Belgrád, **I. díj**
2. Bodócsi Endre, Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **II. díj**
3. Bosanac Bojan, Jovan Jovanović Zmaj Gimnázium, Újvidék, **II. díj**
4. Takács Emese, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **III. díj**
5. Kovács Ildikó, Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **III. díj**
6. Drašković Stefan, Jovan Jovanović Zmaj Gimnázium, Újvidék, **III. díj**
7. Kasza Ákos, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **dicséret**
8. Gleszer Erik, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
9. Vidács Vilmos, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
10. Róka Gáspár, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**

11. évfolyam

1. Homolya Miklós, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **I. díj**
2. Gombár Tamás, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **I. díj**
3. Csizmadija Laura, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **II. díj**
4. Erős Dávid, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **III. díj**
5. Jokić Miloš, Jovan Jovanović Zmaj Gimnázium, Újvidék, **dicséret**
6. Juhász Andor, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**

12. évfolyam

1. Stojanov Marica, Jovan Jovanović Zmaj Gimnázium, Újvidék, **II. díj**
2. Csizmadia Zsolt, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **II. díj**
3. Lakatos Zoltán, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **III. díj**
4. Fésűs Attila, Jovan Jovanović Zmaj Gimnázium, Újvidék, **dicséret**
5. Döme Zsolt, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
6. Takács Árpád, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **dicséret**

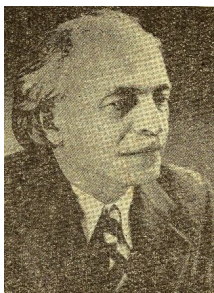
AZ V. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Előadó: dr. Takács Márta

Előadás címe: Fuzzy logika



Eredményhirdetésre várva. A képen Zolnai Irén, Szabó Magdolna és a versenyzők.



V. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

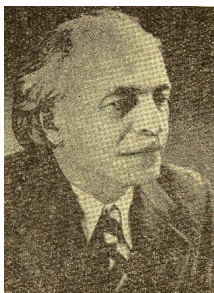
Zenta, 2007. december 15.

9. évfolyam

1. Két házaspár érkezik egy folyóhoz. Az átkeléshez olyan csónak áll rendelkezésre, amelyben legfeljebb két személy részére van hely. A férjek féltékenyek, feleség nem maradhat férfitársaságban a férje jelenléte nélkül sem a folyóparton, sem átkelés közben. Megoldható-e az átkelés, ha mind a négy személy tud evezni?
2. Határozd meg az x és y számjegyeket úgy, hogy az $\overline{1984xy}$ szám osztható legyen 72-vel!
3. Mennyivel egyenlő az n természetes szám, ha $n + S(n) = 1998$, ahol $S(n)$ jelenti az n számjegyeinek összegét?
4. Az $ABCD$ téglalap B csúcsából húzott szögfelező és a B csúcsból induló átló 15° -os szöget zár be, a B csúcsból húzott szögfelező az AC átlót P pontban, a CD oldalt pedig E pontban metszi. Jelölje O az $ABCD$ téglalap átlóinak metszéspontját. Igazold, hogy a COE és PEO háromszögek egyenlő szárúak!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



V. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2007. december 15.

10. évfolyam

1. Három házaspár érkezik egy folyóhoz. Az átkeléshez olyan csónak áll rendelkezésre, amelyben legfeljebb két személy részére van hely. A férjek féltékenyek, feleség nem maradhat férfitársaságban a férje jelenléte nélkül sem a folyóparton, sem átkelés közben. Megoldható-e az átkelés, ha mind a hat személy tud evezni?

2. Oldd meg a következő egyenletet:

$$\sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}} + \sqrt{2x+3-4\sqrt{2x-1}} = 3.$$

3. Oldd meg a következő egyenletet az egész számok halmazán:

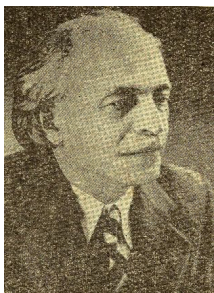
$$x^2 + 26x + 69 = 5^y.$$

4. Egy kör átmérője az AB szakasz. A körbe olyan AC és BD húrokat húzunk, amelyek a kör belsejében egy P pontban metszik egymást. Igazold, hogy

$$|AC| \cdot |AP| + |BD| \cdot |BP| = |AB|^2.$$

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



V. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2007. december 15.

11. évfolyam

1. 24 liter bor van egy 24 literes edényben. Oszd három egyenlő részre ezt a mennyiséget, ha a huszonnégyliteres edényen kívül van még egy 5, egy 11 és egy 13 literes üres edény!

2. Oldd meg a valós számhármasok halmazán a következő egyenletrendszert:

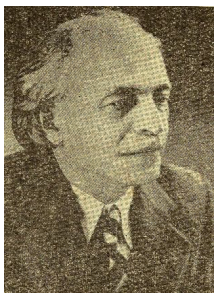
$$x - 9z^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2, \quad 6y - x^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2, \quad 15z - 4y^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2.$$

3. Bizonyítsd be, hogy ha $n \geq 5$ és n 2-vel osztható, de négyvel nem osztható természetes szám, akkor $n^5 - 20n^3 + 64n$ osztható 3840-nel!

4. A négyzet alakú kert oldala 12 méter és 8 méter átmérőjű henger alakú gödröt ástak benne. A kiásott földet egyenletesen lehengerelték. Hány méter mélyre kell ásni, hogy a gödör a lehengerelés után 3 méter mély legyen?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



V. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2007. december 15.

12. évfolyam

1. n sakkjátékos különleges rendszerű versenyt vívott. Bármely játékos bármelyik társával legfeljebb egyszer játszott, döntetlen mérkőzés nem volt (ha kellett, sorsolással döntöttek arról, hogy ki győzött, ki veszett). A versenyvezető megállapította, hogy bármely két játékoshoz található egy harmadik, aki mindkettőt legyőzte. Legalább hány résztvevős volt a verseny?

2. Oldd meg a $\sqrt{\log_2 \frac{3-2x}{1-x}} < 1$ egyenlőtlenséget!

3. Ha minden valós x és y valós számra igaz, hogy

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \text{ és } f(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy,$$

akkor határozd meg az $f(x)$ függvényt!

4. Egy háromszög oldalai 13 cm , 14 cm és 15 cm . Mekkora a távolság a háromszög súlypontja és a köré írt kör középpontja között?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

AZ V. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI

9. évfolyam

1. Két házaspár érkezik egy folyóhoz. Az átkeléshez olyan csónak áll rendelkezésre, amelyben legfeljebb két személy részére van hely. A férfiek féltékenyek, feleség nem maradhat férfitársaságban a férje jelenléte nélkül sem a folyóparton, sem átkelés közben. Megoldható-e az átkelés, ha mind a négy személy tud evezni?

Megoldás. Jelölje F_1, N_1 az első, F_2, N_2 a második házaspárt, férj-nej sorrendben. Az egyik lehetséges megoldás:

		Egyik oldal	Másik oldal
I.	Alaphelyzet	F_1, N_1, F_2, N_2	-
II.	N_1 és N_2 átevez	F_1, F_2	N_1, N_2
III.	N_1 visszatér	F_1, F_2, N_1	N_2
IV.	F_1 és F_2 átevez	N_1	F_1, F_2, N_2
V.	N_2 visszatér	N_1, N_2	F_1, F_2
VI.	N_1 és N_2 átevez, az átkelés megtörtént		F_1, N_1, F_2, N_2

2. Határozd meg az x és y számjegyeket úgy, hogy az $\overline{1984xy}$ szám osztható legyen 72-vel!

Megoldás. $\overline{1984xy}$ osztható 72-vel, ha osztható 8-cal és 9-cel. Ahhoz hogy a szám osztható legyen 9-cel, számjegyeinek összege is osztható kell legyen 9-cel. Mivel $1+9+8+4=18+4$, az x és y számjegyekre igaz lesz, hogy $x+y=5$ vagy $x+y=14$. Mivel

$$\overline{1984xy} = 198400 + 10x + y = 8 \cdot 24800 + 8x + 2x + y,$$

ezért a $8 \mid (2x + y)$ feltételnek igaznak kell lennie.

1.eset: Legyen $x + y = 5$. Ekkor $2x + y = x + x + y = x + 5$, amiből az következik, hogy a $8 \mid (x + 5)$ feltételnek kell teljesülnie, amelynek egyetlen megoldása $x = 3, y = 2$.

2.eset: Legyen $x + y = 14$. Ekkor $2x + y = x + 14 = x + 6 + 8$, amiből az következik, hogy a $8 \mid (x + 6)$ feltételnek kell teljesülnie, amiből $x = 2, y = 12$ megoldás következne, de ez lehetetlen, mivel x és y számjegyek, tehát egyik sem lehet 12. A keresett megoldás tehát egyedül az $x = 3, y = 2$.

3. Mennyivel egyenlő az n természetes szám, ha $n + S(n) = 1998$, ahol $S(n)$ jelenti az n számjegyeinek összegét?

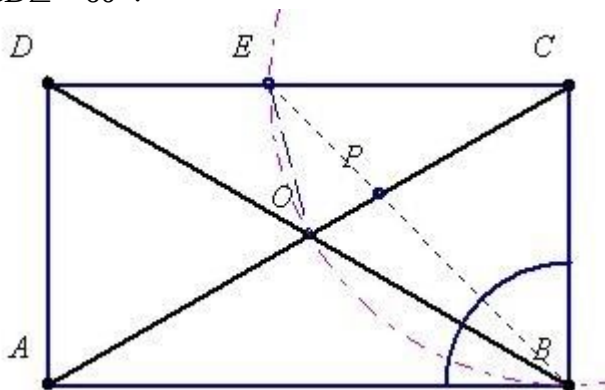
Megoldás. $n \leq 1998$, így $S(n) \leq 1 + 9 + 9 + 8 = 27$. Ezért $n \geq 1998 - 27 = 1971$. Ekkor $S(n) \geq 1 + 9 + 7 + 1 = 18$, így $n \leq 1980$. Tehát $1971 \leq n \leq 1980$. Mivel n és $S(n)$ 9-cel osztva ugyanazt a maradékot adja és 1998 osztható 9-cel, ezért n is osztható 9-cel. Tehát n csak 1971 vagy 1980 lehet. Ellenőrzés:

$$\begin{array}{ll} 1971 + 1 + 9 + 7 + 1 = 1989 & \text{nem jó,} \\ 1980 + 1 + 9 + 8 = 1998 & \text{jó.} \end{array}$$

Tehát $n = 1980$ az egyetlen megoldás.

4. Az $ABCD$ téglalap B csúcsából húzott szögfelező és a B csúcsból induló átló 15° -os szöget zár be, a B csúcsból húzott szögfelező az AC átlót P pontban, a CD oldalt pedig E pontban metszi. Jelölje O az $ABCD$ téglalap átlóinak metszéspontját. Igazold, hogy a COE és PEO háromszögek egyenlő szárúak!

Megoldás. C csúcsból körívet húzunk az O ponton keresztül. Az EB húrhoz tartozó középponti szög 90° -os, ezért a kör B ponton keresztül húzptt érintője a húrral 45° -os szöget zár be, vagyis $EBA\angle = 45^\circ$. Ekkor a feladat feltételéből következik, hogy $DBA\angle = 30^\circ$ és $CBD\angle = 60^\circ$.



A BOC háromszög egyenlő oldalú (egyenlő szárú $|BO| = |CO|$ és van 60° -os szöge), a BCE háromszög egyenlő szárú derékszögű ($ECB\angle$ derékszögű és egyik hegyesszöge 45°), tehát $|CE| = |BC| = |BO| = |CO|$. Ebből következik, hogy COE háromszög egyenlő szárú, azaz $COE\angle = CEO\angle = 75^\circ$.

Mivel $EPO\angle = BPC\angle = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ$, így $OPE\angle = EOP\angle = 75^\circ$, vagyis az PEO háromszög is egyenlő szárú.

10. évfolyam

1. Három házaspár érkezik egy folyóhoz. Az átkeléshez olyan csónak áll rendelkezésre, amelyben legfeljebb két személy részére van hely. A férjek féltékenyek, feleség nem maradhat férfitársaságban a férje jelenléte nélkül sem a folyóparton, sem átkelés közben. Megoldható-e az átkelés, ha mind a hat személy tud evezni?

Megoldás. Jelölje F_1, N_1 az első, F_2, N_2 a második, F_3, N_3 a harmadik házaspárt, férj-nej sorrendben. Ekkor a feladat megoldható: N_1 és N_2 átevez, N_1 visszatér, N_1 és N_3 átevez, N_1 visszatér, F_2, F_3 átevez, F_2, N_2 visszatér, F_1, F_2 átevez, N_3 visszatér, N_2 és N_3 átevez, N_2 visszatér, N_1 és N_2 átevez.

2. Oldd meg a következő egyenletet:

$$\sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}} + \sqrt{2x+3-4\sqrt{2x-1}} = 3.$$

Megoldás. A feladat csak $2x-1 \geq 0$ esetén értelmezett, azaz $x \geq \frac{1}{2}$ esetén. Az egyenlet átalakítható a következő ekvivalens formára:

$$\begin{aligned}\sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}} + \sqrt{2x+3-4\sqrt{2x-1}} &= 3 \\ \sqrt{2x-1-2\sqrt{2x-1}+1} + \sqrt{2x-1-4\sqrt{2x-1}+4} &= 3 \\ \sqrt{(\sqrt{2x-1}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{2x-1}-2)^2} &= 3 \\ |\sqrt{2x-1}-1| + |\sqrt{2x-1}-2| &= 3\end{aligned}$$

Vezessük be a $t = \sqrt{2x-1}$ helyettesítést. Mivel a gyök mindig nemnegatív, ezért $t \geq 0$ érvényes. Most az egyenletünk:

$$|t-1| + |t-2| = 3.$$

Mivel

$$|t-1| = \begin{cases} 1-t, & 0 \leq t < 1 \\ t-1, & t \geq 1 \end{cases} \quad \text{és} \quad |t-2| = \begin{cases} 2-t, & 0 \leq t < 2 \\ t-2, & t \geq 2 \end{cases}$$

felírható, ezért három eset lehetséges:

1. Ha $0 \leq t < 1$, akkor $1-t+2-t=3$, azaz $t=0$. Visszahelyettesítés után adódik, hogy $\sqrt{2x-1}=0$, azaz $2x-1=0$, ahonnan a megoldás $x=\frac{1}{2}$.

2. Ha $1 \leq t < 2$, akkor $t-1+2-t=3$, ahonnan $1=3$ következik, azaz nincs megoldás.

3. Ha $2 \leq t$, akkor $t-1+t-2=3$ adódik, ahonnan $t=3$. Visszahelyettesítés után kapjuk a $\sqrt{2x-1}=3$, illetve $2x-1=9$ egyenletet, amelynek megoldása $x=5$.

A keresett megoldások tehát $x=\frac{1}{2}$ és $x=5$.

3. Oldd meg a következő egyenletet az egész számok halmazán:

$$x^2 + 26x + 69 = 5^y.$$

Megoldás. Az egyenletet átrendezve adódik $x^2 + 26x + 69 - 5^y = 0$, aminek megoldása $x_{1,2} = -13 \pm \sqrt{13^2 - 69 + 5^y} = -13 \pm \sqrt{100 + 5^y}$. Mivel $100 + 5^y$ pozitív négyzetszám, legyen ez a^2 , vagyis $100 + 5^y = a^2$. Ebből adódik, hogy

$$5^y = a^2 - 100 = (a - 10)(a + 10).$$

Mivel 5^y -nak csak az 5 hatványai lehetnek tényezői, legyen $a + 10 = 5^u$, $a - 10 = 5^v$, ahol $u + v = y$. Most $a = 5^u - 10$ és $a = 5^v + 10$, ahonnan $5^u - 10 = 5^v + 10$, illetve $5^u - 5^v = 20$, azaz $5^v(5^{u-v} - 1) = 5 \cdot 4$ következik. Ez csak akkor állhat fenn, ha $v = 1$, $u - v = 1$, tehát $u = 2$, $y = u + v = 3$. Ebből $x_{1,2} = -13 \pm \sqrt{100 + 125} = -13 \pm 15$.

Így a megoldás $x_1 = 2$, $x_2 = -28$, $y_1 = y_2 = 3$.

4. Egy kör átmérője az AB szakasz. A körbe olyan AC és BD húrokat húzunk, amelyek a kör belsejében egy P pontban metszik egymást. Igazold, hogy

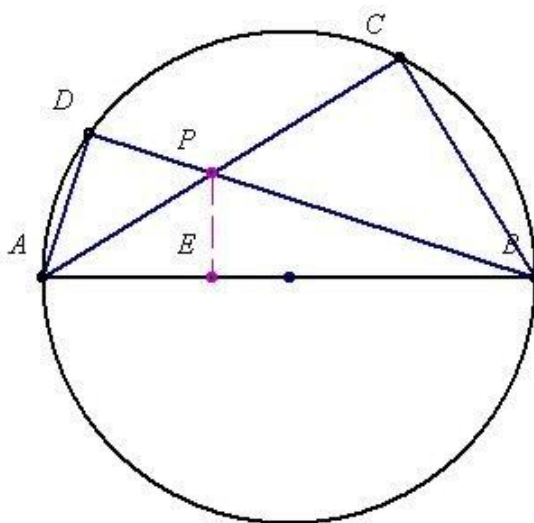
$$|AC| \cdot |AP| + |BD| \cdot |BP| = |AB|^2.$$

Megoldás. Legyen az E pont a P pont AB szakaszra eső merőleges vetülete. Ekkor az APE és ABC háromszögek hasonlóságából (derékszögűek és van közös szögük az A csúcsnál) következik az oldalaik arányossága: $\frac{|AC|}{|AE|} = \frac{|AB|}{|AP|}$, hasonlóan a PEB és BAD háromszögek hasonlóságából (derékszögűek és van közös szögük a B csúcsnál) következik az oldalaik arányossága: $\frac{|EB|}{|DB|} = \frac{|PB|}{|AB|}$.

Ha átírjuk őket szorzatokként és összeadjuk, akkor

$$\left. \begin{aligned} |AC| \cdot |AP| &= |AB| \cdot |AE| \\ |EB| \cdot |AB| &= |BD| \cdot |PB| \end{aligned} \right\} +$$

Ekkor adódik, hogy $|AC| \cdot |AP| + |DB| \cdot |PB| = |AB| \cdot (|AE| + |EB|) = |AB|^2$.



11. évfolyam

1. 24 liter bor van egy 24 literes edényben. Oszd három egyenlő részre ezt a mennyiséget, ha a huszonnégyliteres edényen kívül van még egy 5, egy 11 és egy 13 literes üres edény!

Megoldás. A két – legkevesebb lépésből álló – mód:

24	13	11	5
24	0	0	0
0	8	11	5
16	8	0	0
16	0	8	0
3	13	8	0
3	8	8	5
8	8	8	0

24	13	11	5
24	0	0	0
8	0	11	5
8	11	0	5
8	13	0	3
8	13	3	0
8	8	3	5
8	8	8	0

2. Oldd meg a valós számhármassok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$x - 9z^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2, \quad 6y - x^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2, \quad 15z - 4y^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2.$$

Megoldás. A három egyenletet összeadva és rendezve a következőt kapjuk:

$$x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4y^2 - 6y + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 9z^2 - 15z + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 0.$$

teljes négyzetté való átalakítások után kapjuk, hogy

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(3z - \frac{5}{2}\right)^2 = 0,$$

ami csak akkor teljesül, ha

$$x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{3}{4}, \quad z = \frac{5}{6}.$$

A kapott számhármass nem elégíti ki az eredeti egyenleteket, így az egyenletrendszernek nincs megoldása.

3. Bizonyítsd be, hogy ha $n \geq 5$ és n 2-vel osztható, de négyel nem osztható természetes szám, akkor $n^5 - 20n^3 + 64n$ osztható 3840-nel!

Megoldás. Legyen $A = n^5 - 20n^3 + 64n$. Ekkor elemi átalakítással adódik, hogy

$$A = n(n^4 - 20n^2 + 64) = n(n^2 - 4)(n^2 - 16) = n(n-2)(n+2)(n-4)(n+4).$$

Mivel $n \geq 5$ és $2 \mid n$, de n nem osztható 4-gyel, ezért $n = 4k + 2$ alakú, ahol $k \in \mathbb{N}$.

$$A = (4k + 2)4k(4k + 4)(4k - 2)(4k + 6) = 32(2k - 1)2k(2k + 1)(2k + 2)(2k + 3).$$

Mivel $(2k - 1)2k(2k + 1)(2k + 2)(2k + 3)$ öt egymást követő természetes szám szorzata, ezért a tényezői között van 5-tel osztható, és van 3-mal osztható is, így $15 \mid A$. Viszont $A = 128k(k + 1)(2k - 1)(2k + 1)(2k + 3)$ és $k(k + 1)$ mindig páros, tehát $256 \mid A$. Mivel 15 és 256 relatív prímek, ezért $15 \cdot 256 = 3840 \mid A$.

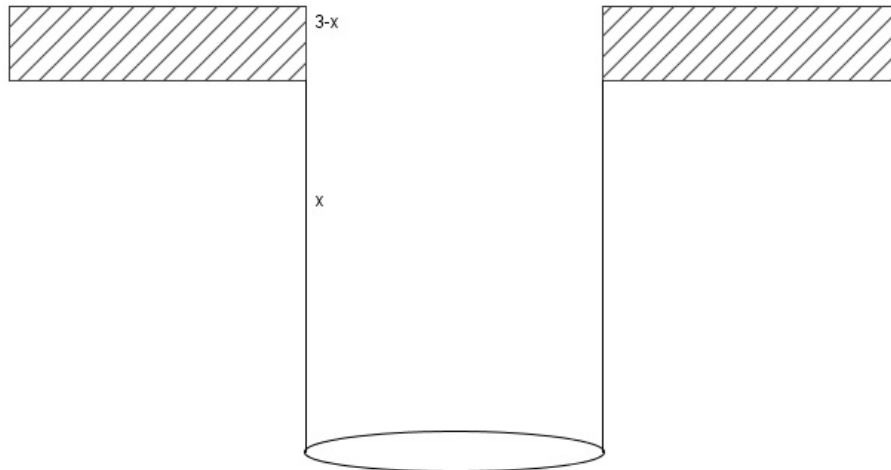
4. A négyzet alakú kert oldala 12 méter és 8 méter átmérőjű henger alakú gödröt ástak benne. A kiásott földet egyenletesen lehengerelték. Hány méter mélyre kell ásni, hogy a gödör a lehengerelés után 3 méter mély legyen?

Megoldás. Legyen a henger alakú gödör kiásott része x magasságú, a henger alapsugara 4 m, az elhengerelt föld magassága pedig $3 - x$. Ekkor

$$(12^2 - 16\pi) \cdot (3 - x) = 16\pi x,$$

tehát

$$x = \frac{432 - 48\pi}{144} = 1,953 \text{ méter mélyre kell ásni.}$$



12. évfolyam

1. n sakkjátékos különleges rendszerű versenyt vívott. Bármely játékos bármelyik társával legfeljebb egyszer játszott, döntetlen mérkőzés nem volt (ha kellett, sorsolással döntöttek arról, hogy ki győzött, ki veszített). A versenyvezető megállapította, hogy bármely két játékoshoz található egy harmadik, aki mindkettőt legyőzte. Legalább hány résztvevős volt a verseny?

Megoldás. Nyilvánvaló, hogy legalább három játékos volt: A , B és C . Tegyük fel, hogy C A -t és B -t is legyőzte. A -t és C -t nem győzhette le B , az csak az eddigiektől különböző D lehetett. A és D csak B -től kaphatott ki.

Az A játékos B , C , D mindegyike legyőzte; szimmetria alapján A akármelyik játékos lehetett, így bármelyik játékosnak legalább három veresége volt. Ennek alapján k versenyző esetén legalább $3k$ mérkőzés volt. Mivel minden versenyző minden versenyzővel legfeljebb egyszer mérkőzött, fennáll a

$$3k \leq \frac{k(k-1)}{2}$$

egyenlőtlenség. $k \geq 7$, a versenyen legalább 7 játékos volt.

Konstruktív módon bizonyítjuk, hogy 7 versenyzővel meg is oldható a probléma. Sorok szerint a $-$ jel a vereséget, a $+$ jel pedig a győzelmet jelenti.

	A	B	C	D	E	F	G
A	o	-	-	-	+	+	+
B	+	o	-	+	-	-	+
C	+	+	o	-	-	+	-
D	+	-	+	o	+	-	-
E	-	+	+	-	o	-	+
F	-	+	-	+	+	o	-
G	-	-	+	+	-	+	o

2. Oldd meg a $\sqrt{\log_2 \frac{3-2x}{1-x}} < 1$ egyenlőtlenséget!

Megoldás. Az egyenlőtlenség értelmezett, ha

$$\frac{3-2x}{1-x} > 0 \text{ és } \log_2 \frac{3-2x}{1-x} \geq 0, \text{ azaz } \frac{3-2x}{1-x} \geq 1, \text{ amiből adódik, hogy}$$
$$\frac{2-x}{1-x} \geq 0. \quad (1)$$

Ugyanakkor

$$\log_2 \frac{3-2x}{1-x} < 1, \text{ amiből következik, hogy } \frac{3-2x}{1-x} < 2, \text{ azaz}$$
$$\frac{1}{1-x} < 0. \quad (2)$$

(1) és (2) egyenlőtlenség közös megoldása adja az eredeti egyenlőtlenség megoldását:
 $x \geq 2$.

3. Ha minden valós x és y valós számra igaz, hogy

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \text{ és } f(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy,$$

akkor határozd meg az $f(x)$ függvényt!

Megoldás. Legyen az $y = 0$, ekkor a második egyenletből kapjuk, hogy:

$$f(x + 0) = f(x) + f(0) + 2x \cdot 0, \text{ illetve } f(x) = f(x) + f(0), \text{ ahonnan } f(0) = 0.$$

$$0 = f(0) = f(-1 + 1) = f(-1) + f(1) + 2(-1)1, \text{ ahonnan } f(-1) + f(1) = 2.$$

$$0 = f(0) = f(-x + x) = f(-x) + f(x) + 2(-x)x, \text{ ahonnan } f(-x) + f(x) = 2x^2.$$

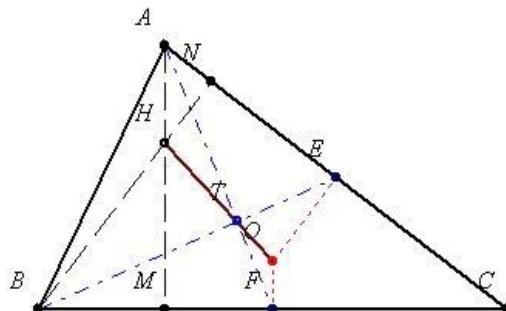
$$f(-1 \cdot x) + f(1 \cdot x) = 2x^2, \text{ vagyis } f(-1) \cdot f(x) + f(1) \cdot f(x) = 2x^2, \text{ ahonnan}$$

$$f(x)[f(-1) + f(1)] = 2x^2, \text{ illetve } 2f(x) = 2x^2, \text{ amelyből } f(x) = x^2.$$

Könnyen leellenőrizhető, hogy az $f(x) = x^2$ függvényre fennállnak a fenti összefüggések.

4. Egy háromszög oldalai 13 cm, 14 cm és 15 cm. Mekkora a távolság a háromszög súlypontja és a köré írt kör középpontja között?

I.Megoldás:



A Stewart-képlet következménye: $|OT|^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9},$

tehát $|OT|^2 = \left(\frac{65}{8}\right)^2 - \frac{13^2 + 14^2 + 15^2}{9} = \frac{265}{576},$ amelyből $|TO| = \frac{\sqrt{265}}{24} \approx 0.6783.$

II.Megoldás: Az AF súlyvonal kiszámítható a következő módon:

$$|AF| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot 13^2 + 2 \cdot 14^2 - 15^2} = \frac{1}{2} \sqrt{505}.$$

Ekkor $|AT| = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{505} = \frac{\sqrt{505}}{3}.$ Vizsgáljuk az AHO háromszöget, amelyben az

AT szakaszra alkalmazhatjuk a Stewart képletet, vagyis

$$|AH|^2 \cdot |TO| + |AO|^2 \cdot |HT| = |AT|^2 \cdot |HO| + |HT| \cdot |TO| \cdot |HO|.$$

Legyen $x = |TO|.$ Ekkor $|HT| = 2x,$ ezért

$$\left(\frac{25}{4}\right)^2 \cdot x + \left(\frac{65}{8}\right)^2 \cdot 2x = \left(\frac{\sqrt{505}}{3}\right)^2 \cdot 3x + 2x \cdot x \cdot 3x, \text{ ebből pedig } x^2 = \frac{265}{576}, \text{ azaz}$$

$$x = |TO| = \frac{\sqrt{265}}{24} \approx 0.6783.$$

III.Megoldás: Legyen az adott ABC háromszögben $|AB|=13$ cm, $|AC|=14$ cm, $|BC|=15$ cm. O a köré írt kör középpontja, T a háromszög súlypontja, H a magasságpontja. Ha a háromszöget egy T középpontú és $k=-2$ arányú homotéciával leképezzük, akkor minden oldal a vele párhuzamos és a szemben fekvő csúcson áthaladó oldalba képeződik le, melynek felezőpontja az adott háromszög csúcsa lesz. De ekkor az oldalfelező merőlegesek O metszéspontja a H magasságpontba képeződik le, miközben $|TH|=2\cdot|TO|$. Kiszámítjuk a HO távolságot, annak harmada lesz a keresett távolság.

A háromszög területe Heron képletéből: $t_{\Delta} = \sqrt{21 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 84$.

A köré írt kör sugara $R = \frac{abc}{4 \cdot t_{\Delta}} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 84} = \frac{65}{8}$.

Az AM magasság tulajdonsága alapján $|AM| = \frac{2 \cdot t_{\Delta}}{a} = \frac{2 \cdot 84}{15} = \frac{56}{5}$.

Az AMB háromszögben: $|BM| = \sqrt{13^2 - \left(\frac{56}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{1089}{25}} = \frac{33}{5}$.

Az $OPFM$ téglalapban $|OP| = |FM| = \frac{15}{2} - \frac{33}{5} = \frac{9}{10}$.

Az OFC derékszögű háromszögben

$|OF|^2 = |OC|^2 - |FC|^2 = \left(\frac{65}{8}\right)^2 - \left(\frac{15}{2}\right)^2 = \frac{625}{64}$, ahonnan $|OF| = \frac{25}{8}$.

Mivel a homotécia alapján: $|AH| = 2 \cdot |OF|$, ezért $|AH| = \frac{25}{4}$.

Ezután $|HP| = |AM| - |AH| - |PM| = \frac{56}{5} - \frac{25}{4} - \frac{25}{8} = \frac{73}{40}$.

Most a HPO derékszögű háromszögből:

$$|HO| = \sqrt{\left(\frac{73}{40}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{6625}{1600}} = \frac{5 \cdot \sqrt{265}}{40} = \frac{\sqrt{265}}{8}.$$

Végül $|TO| = \frac{\sqrt{265}}{24} \approx 0.6783$.

AZ V. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY DÍJAZOTTJAI

9. évfolyam

1. Kovacsics Tamás, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **I. díj**
2. Fésűs Árpád, Jovan Jovanović Zmaj Gimnázium, Újvidék, **II. díj**
3. Vrbaski Iván, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **II. díj**
4. Dóka Ádám, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **III. díj**
5. Kopasz Tamás, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **III. díj**
6. Horvát Zoltán, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
7. Anitics Tamás, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
8. Gyorgyevics Katalin, Bolyai Tehetséggondozó Gimn. és Koll., Zenta, **dicséret**
9. Fejdi Emma, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
10. Kecskeméti Árpád, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
11. Erdélyi Ádám, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
12. Guberina Krisztina, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **dicséret**
13. Farkas Laura, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **dicséret**

10. évfolyam

1. Kecsenovity Egon, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **I. díj**
2. Balassa Tamás, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **I. díj**
3. Tóth Szabolcs, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **II. díj**
4. Ágó Krisztina, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **II. díj**
5. Orosz Csaba, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **III. díj**
6. Guzsvány Szandra, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **III. díj**
7. Kovacsics Tóbiás, Műszaki Középiskola, Becse, **III. díj**
8. Majláth Dániel, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
9. Gulyás Oldal Lénárd, Bolyai Tehetséggondozó Gimn. és Koll., Zenta, **dicséret**
10. Bozsik Zoltán, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
11. Sarok Emma, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **dicséret**
12. Muzsika Tót Tímea, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **dicséret**
13. Kerekes Emese, Dositej Obradović Gimnázium, Topolya, **dicséret**

11. évfolyam

1. Kanalas Vidor, Matematikai Gimnázium, Belgrád, **I. díj**
2. Farkas Gabriella, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **II. díj**
3. Takács Emese, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **III. díj**
4. Körmöczy Arnold, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **III. díj**
5. Vidács Vilmos, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
6. Kasza Ákos, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **dicséret**
7. Gimpel Ákos, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **dicséret**
8. Kovács Ildikó, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
9. Répási Diana, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **dicséret**
10. Róka Gáspár, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
11. Vickó Krisztina, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **dicséret**
12. Bodócsi Endre, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
13. Sárkány Rita, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
14. Harangozó Edina, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
15. Kecskés Szanella, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
16. Gleszer Erik, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
17. Balog Dániel, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**

12. évfolyam

1. Csizmadija Laura, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **I. díj**
2. Homolya Miklós, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **II. díj**
3. Gombár Tamás, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **III. díj**
4. Juhász Andor, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
5. Erős Dávid, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **dicséret**



Díjátadás: Homolya Miklós